GO Maths physique

« Plus un chat tombe de haut plus il a de chance de survivre »

Comment la modélisation des sciences permet d'expliquer ce paradoxe ?

Introduction :

Lorsqu'on parle d'une chute depuis un immeuble on a tendance à associer le danger à la hauteur, cependant ce n'est pas toujours le cas. En effet cette intuition ne s'applique pas toujours dans le cas du chat. Une étude du New York City's Animal Medical Center de New York a fait ressortir que les chats tombés d'une hauteur de deux à six étages présentaient davantage de lésions graves voire mortelles. À contrario, les chats qui chutaient d'une plus grande hauteur s'en sortaient avec des blessures plus légères et moins nombreuses.

Ce paradoxe fait appelle à la fois à la physique à travers les forces qui s'exercent sur un corps lors d'une chute et aux mathématiques, notamment avec les équations différentielles qui permettent de modéliser l'évolution de la vitesse.

Nous pouvons donc nous demander comment les sciences permettent d'expliquer ce paradoxe ?

Pour répondre à cette question, nous commencerons par modéliser simplement la chute d'un corps, sans prendre en compte les frottements (, afin d'en montrer les limites).
Nous introduirons ensuite les frottements de l'air, ce qui nous conduira à une équation différentielle (permettant de mettre en évidence l'existence d'une vitesse limite).
Enfin, nous utiliserons ces résultats pour comprendre pourquoi les chats survivent mieux à certaines chutes de grande hauteur.

I. Modélisation simple d'une chute verticale

Pour commencer, on cherche à modéliser simplement la chute d'un corps afin de comprendre les grandeurs physiques mises en jeu.

On considère donc un objet en chute verticale, soumis uniquement à son poids, et on choisit un repère vertical orienté vers le bas. Ce choix permet de simplifier les calculs, car la gravité est alors positive. Ce modèle est volontairement simplifié et ne prend pas en compte l'action de l'air, ce qui expliquera ses limites. On suppose donc que l'objet est en chute libre et on étudie son mouvement dans le référentiel terrestre suppose galiléen.

D'après la deuxième loi de Newton, la somme des forces extérieurs qui s'exercent sur l'objet est égale au produit de sa masse par son accélération.

Dans ce modèle simplifié, la seule force exercée est le poids, noté $\boldsymbol{P = mg}$. On obtient alors la relation :

ma(t)=mg

Ce qui équivaut à :

a(t)=g

L'accélération est donc constante. Or, on sait que l'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps, c'est-à-dire : **a(t)=v'(t)**

Donc : **v'(t)=g**

C'est ici que l'on se sert des primitives pour résoudre l'équation différentielle.
Soit f une fonction définit sur un intervalle i, on dit que F est une primitive de f sur i si quelque soit x appartenant à i, la dérivée de F(x) vaut f(x).

On obtient :

$$\boldsymbol{v(t) = gt + v_0}$$

Où v_0 représente la vitesse initiale de l'objet au moment où la chute commence.

Pour un mouvement rectiligne décrit en fonction du temps t par la fonction x(t), la vitesse instantané de l'objet est donnée par la dérivée de la position, on a :

$$\boldsymbol{x'(t) = v(t)}$$

Ce qui permet d'obtenir l'expression de la position en fonction du temps :

$$\boldsymbol{x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0}$$

Ce modèle montre donc que, sans frottements, la vitesse augmente linéairement avec le temps et devient de plus en plus grande au fur et à mesure de la chute.
Intuitivement, cela signifie que plus un objet tombe de haut, plus sa vitesse à l'impact est élevée, et donc plus le choc est violent.

Cependant, ce raisonnement entre en contradiction avec les observations faites dans le cas des chutes de chats. En effet, l'étude vétérinaire montre que les chutes de moyenne hauteur sont souvent plus dangereuses que les chutes très élevées.
Le modèle sans frottements ne permet donc pas d'expliquer le paradoxe observé.

Cela montre que cette modélisation est insuffisante, car elle néglige un élément essentiel : l'action de l'air sur l'objet en chute.

Il est donc nécessaire d'améliorer le modèle en introduisant les frottements de l'air, ce que nous allons faire dans la deuxième partie.

Transition :

Ainsi, le modèle sans frottements, bien que simple et efficace, ne permet pas d'expliquer le paradoxe de la chute du chat. Il est donc nécessaire d'introduire les frottements de l'air, ce qui nous conduit à une nouvelle équation différentielle.

II. Prise en compte des frottements de l'air

Dans une chute réelle, surtout quand la vitesse devient importante, l'air exerce une force de résistance qui s'oppose au mouvement. Cette force modifie l'évolution de la vitesse : c'est précisément ce qui manque pour comprendre le paradoxe.

On conserve le même repère : un axe vertical orienté vers le bas, ce qui est pratique puisque le mouvement du chat est globalement vertical.

Deux forces principales s'exercent alors sur le corps en chute :

-Le poids : $\boldsymbol{\vec{P} = m\vec{g}}$**,** dirigé vers le bas

-La force de frottement de l'air : elle est dirigée vers le haut, car elle s'oppose au mouvement

On suppose que la force de frottement est proportionnelle à la vitesse :

$$\boldsymbol{f = k\, v(t)}$$

Où $k > 0$ dépend de la forme de l'objet, de la surface exposée à l'air, et de la "résistance" de l'air.

Comme l'axe est orienté vers le bas :

-Le poids est **positif**

-Le frottement est **négatif**

La chute est verticale, la deuxième loi de Newton permet d'écrire la relation :

ma(t)=mg−kv(t) or **a(t)=v'(t)**

Donc

mv'(t) = mg−kv(t)

On peut diviser par $m$pour obtenir une équation différentielle du premier ordre :

$$v'(t) = g - \frac{k}{m} v(t)$$

C'est exactement une équation différentielle du type :

$$y' = a\,y + b$$

Toutes les solutions de l'équation différentielle, pour tout x appartenant à un réel, sont de la forme :

$$\boxed{y(t) = C\,e^{at} - \frac{b}{a}}$$

Où C est une constante réelle.

Dans notre cas, a= $-\frac{k}{m}$ et b= g

Donc :

$$-\frac{b}{a} = \frac{mg}{k}.$$

On en déduit que les solutions de (E)sont les fonctions définies sur $[0, +\infty[$par :

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k},$$

De plus, la vitesse initiale de l'objet est nulle, donc :

$$v(0) = 0 \iff C + \frac{mg}{k} = 0 \iff C = -\frac{mg}{k}.$$

Ainsi, pour tout $t \geq 0$,

$$\boxed{v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)}.$$

Cette expression montre que la vitesse n'augmente pas indéfiniment. Lorsque le temps devient grand, le terme exponentiel tend vers zéro, et la vitesse se stabilise vers une valeur constante appelée vitesse limite.

$$\boxed{v_{\text{lim}} = \frac{mg}{k}}$$

Contrairement au modèle sans frottements, l'ajout de la résistance de l'air permet donc d'expliquer l'existence d'une vitesse maximale.

Transition :

Ainsi, lors d'une chute de grande hauteur, la vitesse du chat n'augmente presque plus après un certain temps. Dans la troisième partie, nous allons utiliser ce résultat pour expliquer le paradoxe des chutes de chats, et comprendre pourquoi les chutes de moyenne hauteur peuvent être plus dangereuses.

III. Application au paradoxe de la chute du chat

La modélisation mathématique de la vitesse lors d'une chute avec frottements montre que la vitesse d'un corps ne croît pas indéfiniment, mais tend vers une valeur limite. Cette vitesse limite, donnée par l'expression $v_{\text{lim}} = \frac{mg}{k}$, joue un rôle central dans l'interprétation de ce paradoxe.

Lors d'une chute de faible ou moyenne hauteur, le temps de chute est insuffisant pour que la vitesse atteigne cette valeur limite. La vitesse est alors encore en forte augmentation au moment de l'impact. Le choc se produit donc avec une vitesse élevée et sans que le corps du chat ait eu le temps de s'adapter pleinement, ce qui explique la gravité des blessures observées pour des chutes de l'ordre de deux à six étages.

À l'inverse, lors d'une chute de grande hauteur, la durée de la chute est suffisante pour que la vitesse se rapproche de la vitesse limite. La vitesse devient alors presque constante, ce qui modifie profondément la nature du mouvement. Cette stabilisation laisse au chat le temps d'activer son réflexe de redressement et d'adopter une posture adaptée.

En étirant ses pattes horizontalement, le chat augmente la surface exposée à l'air. Cela revient à augmenter le coefficient de frottement k, ce qui diminue la valeur de la vitesse limite $v_{\text{lim}} = \frac{mg}{k}$. La vitesse d'impact est alors réduite, et le choc est mieux amorti. Lors de chutes encore plus importantes, le chat peut également tomber à plat ventre, ce qui permet de répartir les forces exercées lors de l'impact sur une plus grande surface du corps.

Ainsi, ce paradoxe s'explique par le fait que la gravité des blessures ne dépend pas uniquement de la hauteur de la chute, mais aussi de l'évolution de la vitesse au cours du temps. La présence des frottements de l'air, mise en évidence par la résolution de l'équation différentielle, conduit à l'existence d'une vitesse limite et permet au chat d'adapter sa posture lorsque la chute est suffisamment longue.

Conclusion

Le paradoxe de la chute du chat montre que la gravité des blessures ne dépend pas uniquement de la hauteur de la chute. En modélisant le mouvement à l'aide des lois de la mécanique et d'une équation différentielle, on met en évidence l'existence d'une vitesse limite due aux frottements de l'air. Cette vitesse limite explique pourquoi, au-delà d'une certaine hauteur, la vitesse à l'impact n'augmente presque plus.

Cette stabilisation de la vitesse laisse au chat le temps d'adapter sa posture, ce qui lui permet de mieux répartir les forces lors de l'impact et de limiter les blessures. Ainsi, la combinaison des mathématiques et de la physique permet de comprendre et d'expliquer un phénomène qui paraît, au premier abord, contre-intuitif.