Les vecteurs sont surmontés de flèches : $\overrightarrow{A}$, A désignant la norme de $\overrightarrow{A}$ et A_x la composante de x selon la coordonnée x. Dans tous les exercices, le référentiel terrestre $\mathcal{R}_T$, dans lequel règne le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ sera, sauf mention explicite, considéré galiléen pour la durée des phénomènes décrits.

Exercices d'application : Nacelle, ressort et accélération, Millikan, frottement en v, patineur en rotation

Culture en sciences physiques : Nacelle, poulies, parabole de sûreté, Millikan, patineur en rotation, rupture de liaison, oscillations anharmoniques (entraînement aux DLs), frottement solide

Corrigés en TD : Nacelle, parabole de sûreté, frottement en v, patineur en rotation, rupture de liaison

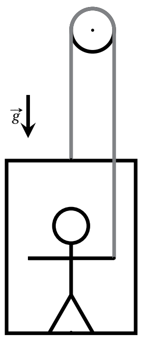
Forces et accélération

Exercice 1 : Nacelle

Un homme est placé dans une nacelle suspendue par un câble passant sur une poulie et sur laquelle l'homme peut tirer.

La masse de l'homme est $m_h = 7{,}20 \cdot 10^1$ kg, celle de la nacelle $m_c = 1{,}20 \cdot 10^1$ kg. On considère qu'on peut négliger la masse du câble et de la poulie, ainsi que les frottements. Dans ces conditions, la norme de la tension du câble est la même en tout point. On note $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$ le vecteur accélération de la pesanteur.

Figure 1



1. (a) Justifier qu'on peut considérer :
   - l'homme seul ;
   - la nacelle seule ;
   - l'ensemble de l'homme et de la nacelle ;

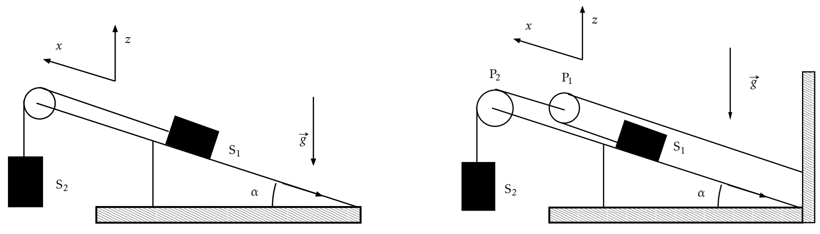
   comme des points matériels.

   (b) Énumérer les forces s'exerçant :
   - sur l'homme ;
   - sur la nacelle ;
   - sur le câble.

   Quelles conclusions le principe des actions réciproques permet-il de tirer ?
2. Déterminer l'intensité des différentes forces de contact entre l'homme, la nacelle et le câble si l'ensemble est immobile.
3. Quelle est l'accélération de la nacelle si l'homme exerce sur le câble une force telle que l'intensité de la force qu'il exerce sur le plancher de la nacelle devient $4{,}00 \cdot 10^2$ N.
4. Quelle est la masse maximale que peut hisser l'homme avec lui dans la nacelle s'il est capable d'exercer sur le câble une force d'intensité $\|\overrightarrow{F_0}\| = 7{,}00 \cdot 10^2$ N.

Exercice 2 : Plan incliné et poulie

Le solide S_1 (de masse M_1) glisse sans frottements sur le plan incliné et S_2 (de masse M_2) se déplace verticalement. Ces solides en translation sont considérés comme des points matériels, les poulies et les fils sont idéaux.



(a) (b)

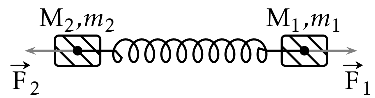
1. On cherche à déterminer l'accélération du solide S_2 (figure 2a).

   (a) Déterminer l'accélération $\ddot{z}$ de S_2 et l'accélération $\ddot{x}$ de S_1 en fonction de leur poids et de la tension T du fil.

   (b) Quelle relation lie $\ddot{z}$ et $\ddot{x}$? En déduire l'accélération de S_2 et la tension du fil.
2. On rajoute maintenant une poulie. La poulie P_2 reste fixée à l'extrémité du plan incliné, la poulie P_1 a son centre lié par un fil au solide M_2 et se déplace parallèlement au plan incliné.

   Déterminer l'accélération du solide S_2 et les tensions des fils (voir la figure 2b). On réfléchira à l'application du principe fondamental de la dynamique à la poulie P_1.

Exercice 3 : Ressort et accélération



On considère le système représenté ci-contre dans lequel deux points matériels, de positions M_1 et M_2 et de masses m_1 et m_2 sont reliés par un ressort idéal de raideur k et se déplacent sans frottement sur un plan horizontal. Le point M_1 (resp. M_2) est de plus soumis à une force $\overrightarrow{F}_1$ (resp. $\overrightarrow{F}_2$).
Ces deux forces sont constantes, colinéaires et de sens opposés, leurs directions sont indiquées sur le schéma ci-dessus. On suppose enfin que le ressort n'oscille plus : les oscillations éventuellement présentes au début se sont amorties et il n'y a plus de mouvement relatif d'une masse par rapport à l'autre. Décrire dans ce cas les mouvements de M_1 et M_2 et en déduire l'élongation du ressort.

Mouvements dans le champ de pesanteur

Exercice 4 : Parabole de sûreté

On s'intéresse au mouvement (dans le référentiel terrestre) d'un projectile dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ terrestre, en l'absence de frottement. Il est toujours lancé avec une vitesse de même norme v_0 mais de direction variable.

1. Retrouver l'équation de la trajectoire si le point est lancé de l'origine du repère cartésien avec une vitesse $\vec{v}_0$ faisant un angle α avec l'horizontale.
2. À quelle condition (portant sur l'angle α) un point de coordonnées X, Z peut-il être atteint par le projectile de vitesse de norme v_0 donnée mais d'angle α quelconque.
3. Montrer que le lieu des points (X, Z) atteignable est situé sous une parabole dont on donnera les paramètres. Justifier le terme de *parabole de sûreté*.

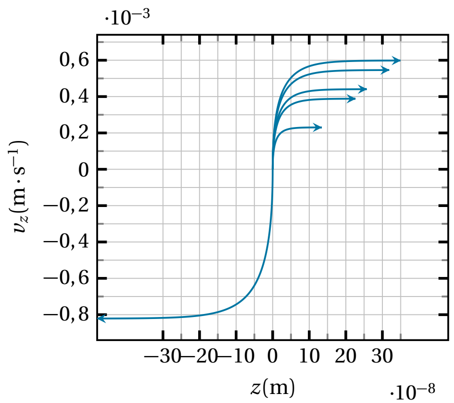
Exercice 5 : Frottement fluide en $\vec{v}$

On considère un point matériel M de masse m. Il est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ faisant un angle β avec l'horizontale dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g}$. On considère de plus qu'il est soumis à une force de frottement fluide dont on peut modéliser l'action par : $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$, avec $\alpha \geqslant 0$ (il faut pour cela que le fluide soit très visqueux par exemple).

1. Identifier un temps τ et une vitesse v_∞ caractéristiques du problème.
2. Déterminer les composantes horizontale et verticale de la vitesse. Quel est la nature du mouvement pour $t \gg \tau$.
3. Déterminer l'évolution temporelle des coordonnées horizontale et verticale de M. Représenter l'allure de la trajectoire.
4. Déterminer l'expression du temps t_m correspondant à l'altitude maximale z_m atteinte. Comparer à la valeur obtenue en l'absence de frottements.

Exercice 6 : Expérience de Millikan

Dans une expérience célèbre, Robert Millikan[i] a mesuré en 1910 la charge élémentaire e en étudiant le mouvement de gouttelettes d'huile chargées sous l'effet de leur poids, de la force de frottement de l'air et d'un éventuel champ électrique.



La ci-contre présente les trajectoires dans l'espace des phases de ce système pour une goutte sphérique de rayon r d'huile de masse volumique ρ en mouvement unidimensionnel vertical soumise à :

- son poids $\vec{P}$;
- la force de frottement fluide de l'air $\vec{F}_f$;
- la force électrostatique $\vec{F}_e = q\vec{E}$ avec $\vec{E}$ le champ électrique uniforme imposé dans l'expérience et q la charge portée par la gouttelette, susceptible de varier.

La goutte est assimilée à un point matériel situé en son centre d'inertie. On s'est limité à la condition initiale $z = 0, v_z = 0$ pour simplifier la figure.

1. On suppose que la force de frottement $\vec{F}_f$ est d'intensité proportionnelle à la vitesse.
   (a) Proposer une expression de $\vec{F}_f$ en fonction du vecteur vitesse $\vec{v}$.
   (b) Établir l'équation différentielle d'évolution de $\vec{v}$ sous l'effet des différentes forces.
   (c) Résoudre cette équation différentielle et en déduire que si q reste constante, le vecteur vitesse de la goutte tend vers une constante v_q. Vérifier l'accord avec les trajectoires de la Figure 6.
   (d) Identifier sur cette figure la trajectoire qui correspond à la situation où l'intensité du champ $\vec{E}$ est nulle et lire la norme v_0 de la vitesse asymptotique correspondante.
2. Dans les conditions de l'expérience, l'intensité de la force de frottement fluide est donnée par la formule de Stockes :
$$F_f = 6\pi\eta r v, \tag{1}$$
avec r le rayon de la gouttelette et η la viscosité de l'air.
   (a) Établir l'expression des vitesses asymptotiques v_0 et v_q en fonction des paramètres du problème.
   (b) Lire la valeur de v_0 et en déduire la valeur du rayon de la goutte pour $\eta = 1{,}86 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa \cdot s}$ et $\rho = 9{,}20 \cdot 10^{2}\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.
3. Pour les trajectoires en présence d'un champ $\vec{E}$, l'intensité E est constante mais la charge q varie d'une courbe à l'autre d'un nombre entier de fois e, la charge élémentaire, du fait de l'absorption ou la perte d'ions par la gouttelette.
   (a) Lire les valeurs des différences entre les valeurs asymptotiques des vitesse et en déduire que ces observations sont compatibles avec des variations de l'intensité de la force de frottement proportionnelles avec la vitesse comme postulé dans l'expression (1).
   (b) Déduire de la valeur Δv de la plus petite différence entre deux vitesses asymptotiques l'expression de la charge élémentaire e en fonction de $E, \eta, r, \Delta v$ puis en fonction de η, E, v_0, g, ρ et Δv. Calculer la valeur de e correspondante pour $E = 3{,}18 \cdot 10^{5}\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$ et comparer à la valeur connue aujourd'hui $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

i. R. Millikan (1868–1953), physicien américain, prix Nobel de physique en 1923.

Mouvements de rotation

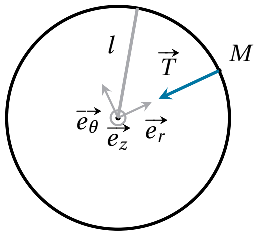
Exercice 7 : Patineur en rotation

Un patineur à roulettes de masse m décrit des révolutions autour d'un poteau fixe vertical en se tenant à une corde. Il s'équilibre de telle sorte que la réaction du sol $\vec{R}$ sur lequel il se déplace n'ait pas de composante radiale ($\vec{R} \cdot \vec{e_r} = 0$). L'homme peut être considéré comme un solide en translation (il suffit pour cela que le rayon de la trajectoire soit suffisamment important).

On utilise les coordonnées cylindriques définies sur la figure ci-dessous.

1. On considère dans un premier temps que le mouvement s'effectue sans frottement et qu'il est circulaire uniforme de rayon l à la vitesse angulaire ω_0 dans le sens de θ croissant. Déterminer la norme T_0 de la tension que le patineur doit exercer sur le câble pour se maintenir en mouvement circulaire uniforme et calculer sa valeur pour $m = 80\,\mathrm{kg}$, $l = 2{,}00\,\mathrm{m}$ et s'il parcourt un tour en $3{,}00\,\mathrm{s}$.

2. À un instant qu'on définit comme nouvelle origine des temps, le patineur commence à freiner. On modélise les frottements avec le sol par une force orthoradiale $\overrightarrow{F_f} = -F_0\overrightarrow{e_\theta}$ de norme $F_0 > 0$ constante. Le patineur ajuste la norme T de manière à rester en mouvement circulaire.



   (a) Déterminer l'évolution temporelle de la vitesse angulaire $\dot\theta$ puis celle de l'angle θ.
   (b) En déduire l'évolution temporelle de T nécessaire puis l'expression de T en fonction de θ. Au bout de combien de tours peut-il lâcher la corde si $F_0 = mg/3$?

Exercice 8 : Oscillations anharmoniques du pendule simple

On cherche à décrire plus précisément le mouvement d'un pendule simple, *ie* en développant $\sin\theta$ à l'ordre suivant en θ : $\sin\theta \simeq \theta - \theta^3/6$. L'équation du mouvement devient alors :

$$\ddot\theta + \omega_0^2\left(\theta - \theta^3/6\right) = 0. \tag{2}$$

1. Exprimer $\sin^3\omega t$ en fonction de $\sin\omega t$ et $\sin 3\omega t$.
2. Montrer que si on essaie une solution sinusoïdale de pulsation ω (prendre $\sin\omega t$) pour le terme correctif en θ^3, il apparaît des termes en $\sin 3\omega t$. On cherche donc une solution approchée de la forme :
$$\theta(t) = \alpha\left(\sin\omega t + \varepsilon\sin 3\omega t\right),$$
avec toujours $|\alpha| \ll 1$ et $|\varepsilon| \ll 1$.
3. Substituer cette expression de θ dans l'équation 2 en ne conservant que le terme oscillant à ω dans le terme correctif en θ^3.
4. En déduire que l'équation est vérifiée pour $\omega \simeq \omega_0\left(1 - \alpha^2/16\right)$ et $\varepsilon \simeq \alpha^2/192$. A-t-on toujours isochronisme ?

Forces de liaison

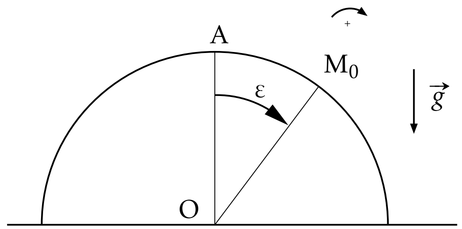
Exercice 9 : Décollement d'une masse en oscillation

On dispose d'un ressort idéal vertical dont l'extrémité inférieure est fixée au sol et muni d'un plateau horizontal à son extrémité supérieure. La masse du plateau est $m_P = 200\,\mathrm{g}$.

1. On mesure que ses oscillations dans le champ de pesanteur ont une fréquence de $3{,}00\,\mathrm{Hz}$. En déduire sa constante de raideur, notée k. On note z_0 la position d'équilibre du système masse ressort.
2. On pose, sans l'y fixer, une masse $m_m = 1\,\mathrm{kg}$ sur le plateau. Déterminer la nouvelle fréquence des oscillations tant que la masse m_m reste au contact et la nouvelle position d'équilibre z_1.
3. On abandonne le dispositif sans vitesse initiale après l'avoir enfoncé de Δz par rapport à la position z_1. On note z_m la position de la masse m_m.
   (a) Établir l'expression de z_m en fonction du temps et en déduire celle de la force de contact entre le plateau et la masse m_m en fonction du temps.
   (b) En déduire la valeur minimale de Δz permettant d'observer le décollement de m_m. Vérifier qu'on aurait pu obtenir ce résultat plus directement.

Exercice 10 : Rupture de liaison

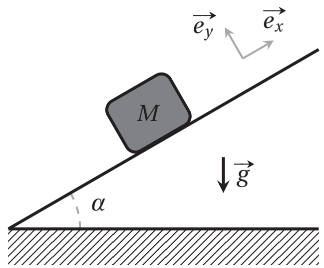
On lâche sans vitesse initiale à l'instant $t = 0$ un point matériel M de masse m au point M_0 de la face convexe d'une sphère (S), fixe de centre 0 et de rayon a sur laquelle il est susceptible de glisser sans frottements. L'ensemble est placé dans le champ de pesanteur terrestre.
On note A le point de la sphère situé à la verticale de O et $\varepsilon = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_0})$ l'angle initial.



1. Montrer que le mouvement est plan et définir le plan dans lequel il s'effectue.
2. On définit, à l'instant t l'angle $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$. On suppose dans un premier temps que l'objet reste au contact de la sphère
   (a) Écrire dans un repère judicieusement choisi la relation fondamentale de la dynamique.
   (b) En multipliant l'une des équations par $\dot\theta$, déterminer la loi d'évolution de $\dot\theta$.
   (c) En déduire l'expression de la réaction R. Montrer qu'alors le point M quitte la sphère pour un angle θ_1. Quelle est la nature du mouvement ultérieur ?

Exercice 11 : Frottement solide

On lance une caisse de masse m selon la ligne de plus grande pente d'un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, de telle sorte qu'elle y décrive un simple mouvement de translation : elle ne tourne pas sur elle-même et ne bascule pas non plus.
On considère l'existence d'un frottement solide entre la caisse et le plan incliné, caractérisé par un coefficient de frottement μ.



1. (a) Énumérer les forces qui s'exercent sur la caisse.
   (b) On décompose la force de réaction du plan incliné sur les axes $\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{e_y}$. Qu'indiquent les lois d'Amontons et de Coulomb sur leurs composantes ?
2. (a) Appliquer la loi de la quantité de mouvement en projection sur $\overrightarrow{e_y}$ pour déterminer la force de réaction normale au plan.
   (b) En déduire la force de réaction tangente au plan puis l'équation différentielle d'évolution de la coordonnée x du centre d'inertie de la caisse.
   (c) En déduire $x(t)$ si, à l'instant $t = 0$, $x = 0$ et $\dot{x} = v_0$, ainsi que la distance parcourue par la caisse avant que x s'annule.
3. (a) Déterminer à quelle condition portant sur μ et α la caisse peut par la suite demeurer immobile.
   (b) Décrire le mouvement ultérieur de la caisse si cette condition n'est pas vérifiée.

Correction de l'exercice 1

1. (a) En négligeant le mouvement de ses bras le long du câble, l'homme reste immobile par rapport à la nacelle et celle-ci est animée d'un mouvement de translation vertical. Ils constituent des solides en translation, qu'on peut donc considérer comme des points matériels.

   (b) L'homme est soumis à la force de tension du câble sur son bras $\overrightarrow{T_1}$, à son poids $\overrightarrow{P_h}$ et à la réaction du sol de la nacelle $\overrightarrow{R_n}$.

   La nacelle est soumise à son poids $\overrightarrow{P_n}$, à la force de tension du câble à son sommet $\overrightarrow{T_2}$ et à la force de contact exercée par l'homme sur son sol $\overrightarrow{R_h}$.

   Le câble est soumis à la force exercée par la nacelle à son sommet $\overrightarrow{T_n}$ et à celle exercée par la main de l'homme $\overrightarrow{T_h}$.

   Le principe des actions réciproques assure que les forces de contact sont opposées deux à deux :

   $$\overrightarrow{T_1} = -\overrightarrow{T_h} \quad \overrightarrow{R_n} = -\overrightarrow{R_h} \quad \overrightarrow{T_2} = -\overrightarrow{T_n}.$$

   On note R la norme commune de $\overrightarrow{R_n}$ et $\overrightarrow{R_h}$. De plus, comme la tension du câble est uniforme, on notera T la norme commune de $\overrightarrow{T_1}$, $\overrightarrow{T_h}$, $\overrightarrow{T_2}$ et $\overrightarrow{T_n}$.

2. On applique la loi de la quantité de mouvement à l'ensemble de l'homme et de la nacelle. Les forces extérieures auxquelles l'ensemble est soumis sont les poids $\overrightarrow{P_h}$ et $\overrightarrow{P_n}$ ainsi que les tensions $\overrightarrow{T_1}$ et $\overrightarrow{T_2}$. Leur somme doit être nulle à l'équilibre, on a donc :

   $$\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} + \overrightarrow{P_h} + \overrightarrow{P_n} = \overrightarrow{0} \quad \text{soit : } 2T = (m_h + m_n)g.$$

   On calcule ainsi $T = 4{,}10 \cdot 10^2\,\mathrm{N}$.
   On calcule l'intensité R en appliquant la loi de la quantité de mouvement à l'homme seul (on obtiendrait le même résultat en l'appliquant à la nacelle). On a cette fois-ci :

   $$\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{P_h} + \overrightarrow{N_n} = \overrightarrow{0} \quad \text{soit : } T + R = m_h g \quad \text{et donc : } R = \frac{(m_h - m_n)g}{2}.$$

   On calcule $R = 2{,}90 \cdot 10^2\,\mathrm{N}$.

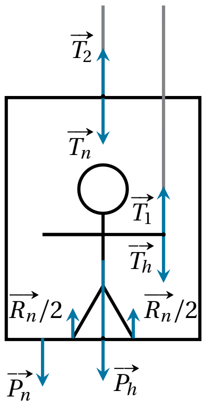


FIGURE 3

3. Si la valeur de R est différente, le système n'est plus à l'équilibre et possède une accélération non nulle, qu'on note $\vec{a} = \ddot{z}\overrightarrow{e_z}$. On applique de nouveau la loi de la quantité de mouvement au seul homme d'une part et à l'ensemble de l'homme et de la nacelle d'autre part :

   $$\text{homme : } m_h\ddot{z} = T + R - m_h g \quad \text{ensemble : } (m_h + m_n)\ddot{z} = 2T - (m_h + m_n)g. \tag{3}$$

   On «fait disparaître» la tension T en multipliant par 2 la première équation et en lui soustrayant la deuxième :

   $$(m_h - m_n)\ddot{z} = 2R + (m_n - m_h)g \quad \text{soit : } \ddot{z} = \frac{2R}{m_h - m_n} - g = 3{,}50\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

4. Si l'homme emporte dans la nacelle la masse $m_{\max}$ maximale, on remplace la masse m_n par $m_n + m_{\max}$. Quand il exerce la force $T_{\max} = 7{,}00 \cdot 10^2\,\mathrm{N}$ maximale, l'accélération $\ddot{z}$ est nulle et l'équation (3) relative à l'ensemble permet alors de déterminer $m_{\max}$ selon :

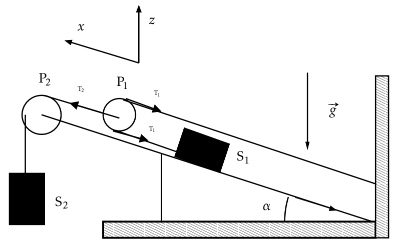
   $$2T_{\max} = (m_h + m_n + m_{\max})g \quad \text{soit : } m_{\max} = \frac{2T_{\max}}{g} - (m_h + m_n) = 5{,}90 \cdot 10^1\,\mathrm{kg}.$$

Correction de l'exercice 2

1. (a) Le fil et la poulie étant idéaux, la tension du fil est uniforme.
   - Le point S_2 est soumis à son poids $m_2\vec{g}$ et à la force de tension $\overrightarrow{T}_2 = T\vec{e}_z$ dans $\mathcal{R}_T$ galiléen : son accélération est : $\ddot{z} = -g + T/m_2$.
   - Le point S_1 est soumis $\overrightarrow{P}_1 = m_1\vec{g}$, à la réaction du support $\vec{R}$ orthogonale à $\vec{e}_z$ et à la force de tension $\overrightarrow{T}_1 = T\vec{e}_x$. Son accélération selon $\vec{e}_x$ vaut donc : $\ddot{x} = T/m_1 - g\sin\alpha$.

   (b) Le fil est inextensible, sa longueur $l = -x - z$ (en choisissant l'origine des axes x et z sur la poulie) est constante donc $\ddot{x} = -\ddot{z}$. On résout le système : $\begin{cases} m_2\ddot{z} = -m_2 g + T \\ -m_1\ddot{z} = -m_1 g\sin\alpha + T \end{cases}$ en effectuant la différence des deux équations pour faire disparaître T. On obtient :$\ddot{z} = g\frac{m_1\sin\alpha - m_2}{m_1 + m_2}$ dont on vérifie les limites $m_1 \gg m_2$ et $m_2 \gg m_1$. La tension est déterminée en effectuant maintenant la somme des équations multipliées respectivement par $1/m_2$ et $1/m_1$. On obtient $T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}(1 + \sin\alpha)$.

2. On fait figurer sur le schéma ci-contre uniquement les forces de tension auxquelles est soumise la poulie mobile P_1.
   - Le point S_2 est toujours soumis à son poids $\overrightarrow{P}_2 = -m_2 g\vec{e}_z$ et à la tension du fil 2 $T_2\,\vec{e}_z$.
   - Le point S_1 est soumis à la force de tension du fil 1 $T_1\,\vec{e}_x$, à son poids $\overrightarrow{P}_1 = -m_1\,ez$ et à la réaction du support $\vec{R}$, toujours normale à $\vec{e}_x$.
   - La poulie 1, de masse nulle, est, quant à elle, soumise aux forces de tension du fil 1 qui s'exerce en deux points différents : $-2T_1\,\vec{e}_x$ et à celle du fil 2 $T_2\vec{e}_x$. La somme vectorielle de ces forces est nécessairement nulle.



   La relation fondamentale de la dynamique s'écrit : $\begin{cases} m_2\ddot{z} = -m_2 g + T_2 \\ m_1\ddot{x} = T_1 - m_1 g\sin\alpha \\ 0 = T_2 - 2T_1 \end{cases}$. Puisque $T_2 = 2T_1$, on l'élimine dans les deux premières équations par combinaison linéaire pour obtenir : $m_2\ddot{z} - 2m_1\ddot{x} = -m_2 g + 2m_1 g\sin\alpha$. Il reste à déterminer la relation entre $\ddot{x}$ et $\ddot{z}$ en écrivant l'invariance de la longueur de chacun des fils : on obtient $2\ddot{z} = -\ddot{x}$. Finalement :

   $$\ddot{z} = g\frac{2m_1\sin\alpha - m_2}{m_2 + 4m_1} \quad \text{puis} \quad T_1 = T_2/2 = g\frac{m_1 m_2}{m_2 + 4m_1}(2 + \sin\alpha).$$

Correction de l'exercice 3

On note x_i ($i = 1, 2$) les abscisses des deux points matériels, et $\vec{\mathrm{T}}_i$ la force de tension exercée par le ressort sur le point matériel i. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit, pour chaque point matériel : $m_i \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_x = \vec{\mathrm{F}}_i + \vec{\mathrm{T}}_i$. Le ressort n'oscillant pas, on a $\ddot{x}_1 = \ddot{x}_2$, qu'on notera $\ddot{x}_\mathrm{G}$. Comme il est idéal, la tension est uniforme et on a $\vec{\mathrm{T}}_1 = -\vec{\mathrm{T}}_2$. On obtient ainsi $m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = (m_1+m_2)\ddot{x} = \vec{\mathrm{F}}_1 + \vec{\mathrm{F}}_2$. On en déduit, par exemple : $\vec{\mathrm{T}}_2 = m_2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_x - \vec{\mathrm{F}}_2 = \frac{m_2\vec{\mathrm{F}}_1 - m_1\vec{\mathrm{F}}_2}{m_1+m_2}$. L'élongation du ressort vaut donc $\vec{\Delta l} = -\vec{\mathrm{F}}_2/k = \frac{m_1\vec{\mathrm{F}}_2 - m_2\vec{\mathrm{F}}_1}{(m_1+m_2)k}$. On peut vérifier les signes de cette expression en choisissant $\vec{\mathrm{F}}_1 = 0$ et $\vec{\mathrm{F}}_2$ dirigée de M_1 vers M_2 : on obtient bien un allongement du ressort.

Correction de l'exercice 4

1. L'équation de la trajectoire est, avec z orienté selon la verticale ascendante :

$$z - \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\left(x - \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2.$$

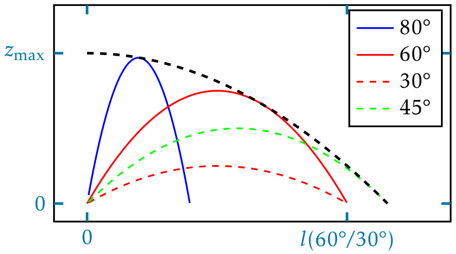
2. Un point de coordonnées (X,Z) peut être atteint s'il existe un angle α tel que :

$$\mathrm{Z} - \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = \frac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\left(\mathrm{X} - \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2 \to \mathrm{Z} = \frac{-g\mathrm{X}^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} + \mathrm{X}\tan\alpha = \frac{-g\mathrm{X}^2}{2v_0^2}\left(1+\tan^2\alpha\right) + \mathrm{X}\tan\alpha$$

$$\text{soit } \frac{g}{2v_0^2}\mathrm{X}^2u^2 - u\mathrm{X} + \left(\frac{g\mathrm{X}^2}{2v_0^2} + \mathrm{Z}\right) = 0 \quad \text{avec } u = \tan\alpha.$$

Ce trinôme en u admet des racines réelles si son discriminant est positif, soit, après calculs : $\mathrm{Z} \leqslant \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g\mathrm{X}^2}{2v_0^2}$.

3. Les points accessibles par un tir à la vitesse v_0 sont donc ceux situés sous la parabole d'équation $\mathrm{Z} = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g\mathrm{X}^2}{2v_0^2}$, de sommet $(\mathrm{X} = 0; \mathrm{Z} = \frac{v_0^2}{2g}) \equiv z_{\max}$. On représente sur la figure ci-contre cette parabole ainsi que différentes trajetoires. On constate que les deux trajectoires correspondant à 80° et 60° permettent d'atteindre un même point particulier.



Correction de l'exercice 5

1. Dans $\mathcal{R}_\mathrm{T}$ galiléen, le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\alpha\vec{v} - m\vec{g}$, soit

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{\vec{v}_\infty}{\tau} \quad \text{avec } \tau = m/\alpha\ \vec{v}_\infty = m\vec{g}/\alpha.$$

On pose pour la suite $\vec{v}_\infty = -v_\infty\vec{e}_z$, avec $v_\infty = mg/\alpha \geqslant 0$ (on oriente Oz selon la verticale ascendante).

2. On choisit l'axe $\vec{e}_x$ tel que la vitesse $\vec{v}_0$ soit contenue dans le plan $\vec{e}_x, \vec{e}_z$, avec $\beta = (\vec{e}_x, \vec{v}_0)$. Le mouvement est alors contenu dans le plan $\vec{e}_x, \vec{e}_z$ et on a : $\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + v_x/\tau = 0$ et $\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + v_z/\tau = -v_\infty/\tau$ on a donc :

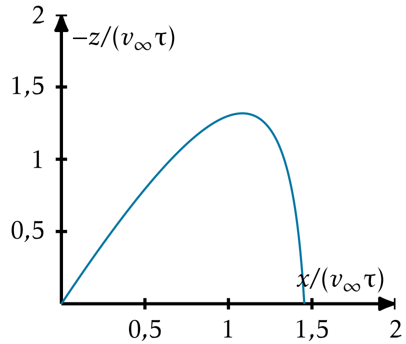
$$v_x(t) = v_0\cos\beta e^{-t/\tau} \qquad v_z(t) = -v_\infty + (v_0\sin\beta + v_\infty)e^{-t/\tau},$$

En considérant que $\beta > 0$ correspond à un projectile lancé vers le haut ($\vec{e}_z$).
Pour $t \gg \tau$, la composante horizontale tend vers 0 et la composante verticale vers $-v_\infty$: le mouvement est rectiligne uniforme à $\vec{v}_\infty$. Ce résultat était déjà directement lisible dans l'équation différentielle vectorielle sur $\vec{v}$.

3. Par intégration entre l'instant $t = 0$ (où $x = 0$ et $z = 0$ pour simplifier), on a :

$$\begin{cases} x/(v_\infty\tau) &= \frac{v_0\cos\beta}{v_\infty}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \\ z/(v_\infty\tau) &= -\frac{t}{\tau} + \left(1 + \frac{v_0\sin\beta}{v_\infty}\right)\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \end{cases}$$

La trajectoire est donnée ci-contre pour $\beta = 60°$ et $v_0 = 3v_\infty$.
On aurait aussi bien pu intégrer l'équation différentielle vectorielle directement.



4. On obtient l'altitude maximale pour $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$, soit $t_m = \tau\ln\left(1 + \frac{v_0\sin\beta}{v_\infty}\right)$ où $z_m = \tau(v_0\sin\beta - v_\infty\ln\left(1 + \frac{v_0\sin\beta}{v_\infty}\right))$. Dans le cas sans frottement, on obtenait $z_m = v_0^2\sin^2\beta/(2g)$, dont on peut vérifier qu'il s'agit de la limite de l'expression précédente pour $t_m \ll \tau$ ou $v_0 \ll v_\infty$

Correction de l'exercice 6

1. (a) La force de frottement fluide doit être colinéaire et de sens opposé au vecteur vitesse $\vec{v}$, on doit donc avoir :

$$\vec{\mathrm{F}}_f = -\mathrm{K}\vec{v},$$

avec K une constante positive.

   (b) La loi de la quantité de mouvement s'écrit :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{K}\vec{v} + m\vec{g} + q\vec{\mathrm{E}} \quad \text{soit : } \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{K}}{m}\vec{v} = \vec{g} + \frac{q\vec{\mathrm{E}}}{m}. \tag{4}$$

qu'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \frac{v_\infty}{\tau},$$

avec $\tau = \frac{m}{\mathrm{K}}$ un temps caractéristique et $v_\infty = \frac{m\vec{g} + q\vec{\mathrm{E}}}{\mathrm{K}}$ une vitesse.

(c) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les solutions sont :

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_\infty} + \vec{A}e^{-t/\tau}.$$

L'unique solution vérifiant la condition initiale $\vec{v}(t=0) = \vec{v_i}$ est :

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_\infty} + (\vec{v_i} - \overrightarrow{v_\infty})e^{-t/\tau}.$$

Quand t tend vers l'infini, le vecteur vitesse $\vec{v}$ tend vers v_∞. Remarquons que cette expression pouvait être obtenue directement en annulant $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$ dans l'équation (4).
On observe bien sur la Figure 6 que chaque trajectoire tend vers une droite horizontale correspondant à v_z constante.

(d) La direction de $\overrightarrow{v_\infty}$ est celle de $m\vec{g} + q\vec{E}$. Si l'intensité du champ E est nulle, $\overrightarrow{v_\infty}$ est dirigée vers le bas, la trajectoire correspondante est donc celle pour laquelle v_z tend vers une valeur négative $-v_0$, avec $v_0 = -8{,}20\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

2. (a) On a ici $K = 6\pi\eta r$. La masse de la goutte sphérique étant $\frac{4\pi r^3\rho}{3}$, on a :

$$v_0 = \frac{mg}{6\pi\eta r} = \frac{2r^2\rho g}{9\eta} \quad \text{et : } v_q \left| -v_0 + \frac{qE}{6\pi\eta r} \right|. \tag{5}$$

(b) La valeur de v_0 lue permet de calculer :

$$r = \frac{9\eta v_0}{2g\rho} = 2{,}74\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}.$$

3. (a) Les différences entre les valeurs des vitesses asymptotiques en présence du champ E diffèrent toutes d'un multiple d'une même valeur égale à $5{,}26\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, tout comme $v_{q+1} - v_q = \frac{E}{6\pi\eta r}$ dans l'expression (5). Ce résultat est caractéristique d'une force de frottement d'intensité proportionnelle à la vitesse. Si F_f avait été de la forme $F_f = K'v^2$ par exemple, on aurait eu : $v_q = \sqrt{\frac{mg+qE}{K'}}$, et la différence entre v_{q+1} et v_q n'aurait pas été constante.

(b) Les charges q sont des multiples entiers de la charge élémentaire e, on a donc :

$$v_{q+1} - v_q = \Delta v = \frac{eE}{6\pi\eta r} \quad \text{soit : } e = \frac{6\pi\eta r\Delta v}{E} = \frac{18\pi\eta\Delta v}{E}\sqrt{\frac{\eta v_0}{2g\rho}}.$$

On a lu $\Delta v = 5{,}26\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, on en déduit : $e = 1{,}59\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, légèrement inférieur à la valeur aujourd'hui admise.

Correction de l'exercice 7

1. L'homme constitue un solide en translation circulaire, soumis à son poids $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$, à la réaction du sol $\vec{R} = R_z\vec{e_z} + R_\theta\vec{e_\theta}$ et à la tension de la corde $\vec{T} = -T\vec{e_r}$. Son accélération en coordonnées cylindriques est :

$$\vec{a} = \left(\ddot{r}\vec{e_r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{e_\theta} + \ddot{z}\vec{e_z}$$

soit, pour un mouvement circulaire uniforme horizontal : $\vec{a} = -l\omega_0^2\vec{e_r}$.

La loi de la quantité de mouvement s'écrit $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T}$, soit en projection sur $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$ respectivement :

$$-ml\omega_0^2 = -T_0 \qquad R - P = 0.$$

On a $\omega_0 = 2\pi \times 0{,}330\,\mathrm{Hz}$, on calcule : $T_0 = 7{,}00\cdot 10^2\,\mathrm{N}$, de l'ordre de grandeur du poids de l'homme.

2. (a) Les projections sur $\vec{e_r}$ et $\vec{e_z}$ ne changent pas mais on a désormais sur $\vec{e_\theta}$:

$$ml\ddot{\theta} = -F_0 \quad \ddot{\theta} = -\frac{F_0}{ml} \tag{6}$$

$$\text{soit, en intégrant : } \dot{\theta} - \omega_0 = \int_{\tau=0}^{\tau=t} -\frac{F_0}{ml}\,\mathrm{d}\tau \tag{7}$$

$$\dot{\theta} = \omega_0 - \frac{F_0 t}{ml} \tag{8}$$

$$\text{et, en intégrant de nouveau : } \theta - \theta(0) = \omega_0 t - \frac{F_0 t^2}{2ml}. \tag{9}$$

(b) L'équation sur $\vec{e_r}$ permet d'exprimer :

$$T = ml\dot{\theta}^2 = ml\left(\omega_0 - \frac{F_0 t}{ml}\right)^2 = ml\omega_0^2\left(1 - \frac{F_0 t}{ml\omega_0}\right)^2$$
$$= T_0\left(1 - \frac{F_0 t}{ml\omega_0}\right)^2.$$

Il est ensuite plus simple d'exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de θ. L'expression de $\dot{\theta}(t)$ de l'équation (8) donne t en fonction de $\dot{\theta}$ qu'on reporte dans celle de $\theta(t)$. On obtient finalement :

$$\dot{\theta}^2 = \omega_0^2 - \frac{2F_0\theta}{ml} \quad \text{soit : } T = ml\dot{\theta}^2 = ml\omega_0^2\left(1 - \frac{2F_0\theta}{ml\omega_0^2}\right),$$

qui s'annule pour $\theta = \frac{ml\omega_0^2}{2F_0} = 1{,}30\,\mathrm{rad}$ soit environ 0,200 tour.

Correction de l'exercice 8

1. Si on essaie une solution en $\sin\omega t$, les différents termes de l'équation donnent :
   - $\ddot{\theta} = -\omega^2\sin\omega t$ qui s'annulerait bien avec $\omega_0^2\sin\omega t$ pour $\omega = \omega_0$
   - $\sin^3\omega t$ qui fait apparaître des termes oscillant à $3\omega t$ puisque $\sin^3\omega t = \sin\omega t\left(1 - \cos^2\omega t\right) = \sin\omega t\,\frac{1-\cos 2\omega t}{2}$ qui vaut, après calculs : $\sin^3\omega t = \frac{3\sin\omega t}{4} - \frac{\sin 3\omega t}{4}$. **Remarque** On peut également obtenir ce résultat sans faire la décomposition complète en utilisant $\sin\omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}$ dont le cube fait immédiatement apparaître le $-\frac{\sin 3\omega t}{4}$.

2. On injecte une fonction de le forme suggérée dans l'équation. Le terme en θ^3 donnera alors du $\alpha^3(\sin\omega t + \varepsilon\sin 3\omega t)^3 \simeq \alpha^3\sin^3\omega t = \frac{\alpha^3}{4}(3\sin\omega t - \sin 3\omega t)$ puisque $\varepsilon \ll 1$. L'équation devient alors : $-\alpha\omega^2(\sin\omega t + 9\varepsilon\sin 3\omega t) + \alpha\omega_0^2(\sin\omega t + \varepsilon\sin 3\omega t) - \frac{\alpha^3\omega_0^2}{6}\sin^3\omega t = 0.$

3. Avec $\sin^3\omega t = \frac{1}{4}(3\sin\omega t - \sin 3\omega t)$, l'équation ne pourra être vérifiée pour tout t que si séparément, la somme de tous les termes en $\sin\omega t$ et de ceux en $\sin 3\omega t$ est nulle, soit pour :

   ω : $-\alpha\omega^2 + \alpha\omega_0^2 - \frac{\alpha^3}{8}\omega_0^2 = 0$

   3ω : $-9\alpha\varepsilon\omega^2 + \alpha\varepsilon\omega_0^2 + \omega_0^2\frac{\alpha^3}{24}\omega_0^2 = 0$

4. La pulsation est légèrement diminuée par rapport à la pulsation $\omega_0\sqrt{g/l}$: $\omega^2 = \omega_0^2\left(1-\alpha^2/8\right)$, soit : $\omega = \omega_0\sqrt{1-\alpha^2/8} \simeq 1-\alpha^2/16$, (D.L. d'ordre 1 de $(1+x)^n \simeq 1+n\,x$). L'effet n'est que du deuxième ordre en α. L'amplitude de la correction en $\sin 3\omega t$ vaut : $\varepsilon = \frac{-\alpha^2}{24}\frac{1}{1-9(1-\alpha^2/16)} \simeq \frac{\alpha^2}{192}$, également du deuxième ordre en α. On n'a plus ici isochronisme puisque la pulsation dépend de l'amplitude α des oscillations.

Correction de l'exercice 9

1. Les résultats usuels sur l'oscillateur harmonique assurent que $\omega = \sqrt{k/m_{\mathrm{P}}}$, soit $k = m_p(2\pi f)^2 = 71{,}1\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.
2. On raisonne sur un système formé du plateau et de la masse m_m, qui restent solidaires tant que cette dernière ne décolle pas. La nouvelle fréquence est $f' = 2\pi\sqrt{(m_{\mathrm{P}}+m_m)/g} = f\sqrt{1+m_m/m_{\mathrm{P}}} = 7{,}30\,\mathrm{Hz}$. Au nouvel équilbre le ressort sera comprimé de $z_0 - z_1 > 0$ par rapport à l'équilbre précédent. La loi de la quantité de mouvement donne alors, en notant l_0 la longueur à vide du ressort et en repérant les altitudes z par rapport à l'extrémité inférieure du ressort :

   $$\vec{0} = (m_m + m_{\mathrm{P}})\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\vec{e_z} = -(m_p+m_m)g\vec{e_z} - k(z_1 - l_0)\vec{e_z}.$$

   L'équilibre en l'absence de la masse m_m s'écrivait :

   $$\vec{0} = m_{\mathrm{P}}\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\vec{e_z} = -m_p g\vec{e_z} - k(z_0 - l_0)\vec{e_z}.$$

   On obtient immédiatement, en formant la différence de ces deux équations :

   $$m_m g = k(z_0 - z_1) \to z_1 = z_0 - \frac{m_m g}{k}.$$

   On a par ailleurs bien évidemment : $z_0 = l_0 - m_{\mathrm{P}}g/k$.
3. (a) Le ressort va effectuer des oscillations de pulsation $\omega' = 2\pi f'$ et d'amplitude Δz autour de z_1, soit, avec les conditions initiales $z(0) = -\Delta z$ et $\dot{z}(0) = 0$.

   $$z(t) = z_1 - \Delta z\cos\left(\omega' t\right).$$

   L'étude ne fait pas intervenir la force entre la masse m_m et le plateau puisqu'il s'agit d'une force intérieure.
   En revanche, si on prend désormais comme système la masse m_m seule, elle n'est soumise qu'à son poids et à la réaction du plateau. Le ressort n'exerce pas de force sur elle puisqu'elle n'est pas en contact avec lui.
   La loi de la quantité de mouvement s'écrit alors, en posant $\vec{\mathrm{R}} = \mathrm{R}_z\vec{e_z}$ la réaction exercée par le plateau sur la masse m_m :

   $$m_m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\vec{e_z} = -m_m g\vec{e_z} + \mathrm{R}_z\vec{e_z}.$$

   Comme on connaît déjà $z(t)$, on réécrit cette expression :

   $$m_m\omega'^2\Delta z\cos\left(\omega' t\right) = -m_m g + \mathrm{R}_z$$
   $$\mathrm{R}_z = m_m\omega'^2\Delta z\cos(\omega' t) + m_m g = m_m g\left(1 + \frac{k\Delta z\cos(\omega' t)}{(m_m + m_{\mathrm{P}})g}\right).$$

   (b) La masse m_m pourra décoller si la tension s'annule. Comme le $\cos(\omega t)$ est toujours supérieur à -1, la valeur minimale de Δz est celle pour laquelle $\mathrm{R}_z = 0$ quand $\omega' t = \pi$, soit :

   $$k\Delta z = (m_m + m_{\mathrm{P}})g.$$

   Calculons l'altitude à ce moment :

   $$z(t = \pi/\omega') = z_1 + \Delta z = l_0 - \frac{(m_m + m_{\mathrm{P}})g}{k} + \frac{(m_m + m_{\mathrm{P}})g}{k} = l_0.$$

   Comme on pouvait s'y attendre, le décollement sera possible si au cours de son mouvement la compression du ressort s'annule. En effet, une fois le ressort allongé, la masse se désolidarise du plateau puisque ce dernier ne peut exercer qu'une répulsion et ne peut donc pas la retenir.

Correction de l'exercice 10

1. Le point est initialement immobile. Soumis à $\vec{\mathrm{P}}$ et la réaction $\vec{\mathrm{R}}$ colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{OM}_0}$, il acquiert une vitesse dans le plan $\mathcal{P}$ défini par ces deux vecteurs. Il reste donc dans le plan $\mathcal{P}$.
2. (a) On choisit les coordonnées polaires dans laquelle les expressions des forces sont : $\vec{\mathrm{P}} = mg(\sin\alpha\,\vec{e}_\theta - \cos\alpha\,\vec{e}_r)$ et $\vec{\mathrm{R}} = \mathrm{R}\,\vec{e}_r$, avec $\mathrm{R} > 0$ tant qu'il y a contact. Le mouvement étant circulaire, l'accélération s'exprime comme : $\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t^2} = a\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - a\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r$. Dans $\mathcal{R}_{\mathrm{T}}$ galiléen, le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $\begin{cases}\ddot{\theta} & = \frac{g}{a}\sin\theta\\ \dot{\theta}^2 & = \frac{g}{a}\cos\theta - \frac{\mathrm{R}}{ma}.\end{cases}$

   (b) En multipliant la première équation par $\dot{\theta}$, on obtient :

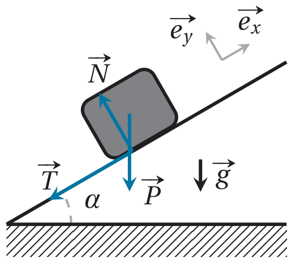
   $$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\sin\theta\dot{\theta}\quad\text{soit}\quad\frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{a}\frac{\mathrm{d}(-\cos\theta)}{\mathrm{d}t} \to \int_{t=0}^{t}\frac{\mathrm{d}\frac{1}{2}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{g}{a}\int_{t=0}^{t}\frac{\mathrm{d}(-\cos\theta)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$
   $$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{a}(\cos\varepsilon - \cos\theta) \to \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}(\cos\varepsilon - \cos\theta).$$

   (c) On peut alors déterminer la réaction : $\mathrm{R} = mg(3\cos\theta - 2\cos\varepsilon)$ qui s'annule pour $\theta_1 = \mathrm{acos}\frac{2\cos\varepsilon}{3} \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} 48°$
   Le point matériel a alors un mouvement parabolique de chute libre dans le champ de pesanteur.

Correction de l'exercice 11

1. (a) La caisse est soumise à :

- son poids $\overrightarrow{\mathrm{P}} = m\overrightarrow{g}$ dont les composantes tangentielle et normale au plan sont respectivement $\mathrm{P}_x = -mg\sin(\alpha)$ et $\mathrm{P}_y = -mg\cos(\alpha)$;
- la réaction du support dont on note respectivement $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ les composantes tangentielle et normale au plan.



(b) Les lois du frottement solide indiquent que :
- La caisse ne pourra demeurer immobile que si l'intensité de la force $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ nécessaire pour assurer cet équilibre reste inférieure à $\mu\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\|$;
- Si la caisse glisse le long du plan, on aura $\|\overrightarrow{\mathrm{T}}\| = \mu\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\|$ et la force $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ sera de sens opposé à la vitesse de la caisse.

2. (a) La loi de la quantité de mouvement s'écrit :

$$m\overrightarrow{a}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{P}} + \overrightarrow{\mathrm{T}} + \overrightarrow{\mathrm{N}} \quad \text{soit, en projection sur } \overrightarrow{e_y} : m\ddot{y} = -mg\cos(\alpha) + \|\overrightarrow{\mathrm{N}}\|.$$

Tant que la caisse reste au contact du plan, on doit avoir $\ddot{y} = 0$, soit $\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\| = mg\cos(\alpha)$.

(b) La caisse est initialement en mouvement vers le haut, sa vitesse est donc $\dot{x}\overrightarrow{e_x}$, avec $\dot{x} \geqslant 0$. La force $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ vérifie alors $\overrightarrow{\mathrm{T}} = -\mu\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\|\overrightarrow{e_x} = -\mu mg\cos(\alpha)\overrightarrow{e_x}$, tant que $\dot{x} > 0$ et on a finalement :

$$\ddot{x} = -g\sin(\alpha) - \mu g\cos(\alpha).$$

(c) On est en présence d'un mouvement uniformément accéléré, formellement identique à celui d'une chute libre unidimensionnelle sans frottement, on obtient immédiatement par intégration :

$$\dot{x} - v_0 = (\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha))gt \quad \text{et} : x(t) = v_0 t - \frac{(\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha))gt^2}{2}.$$

La vitesse s'annule pour $t_1 = \frac{v_0}{(\sin(\alpha)+\mu\cos(\alpha))g}$ où :

$$x(t_1) = \frac{v_0^2}{2g(\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha))}.$$

3. (a) Les forces $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{P}}$ sont constantes. En revanche la norme $\|\overrightarrow{\mathrm{T}}\|$ peut prendre n'importe quelle valeur inférieure à $\mu\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\|$ pour assurer l'équilibre. Il faut pour cela avoir $\ddot{x} = 0 = \mathrm{T}_x - \mathrm{P}_x = \mathrm{T}_x - mg\sin(\alpha)$, soit $\mathrm{T}_x = mg\sin(\alpha)$. La condition d'équilibre $\|\overrightarrow{\mathrm{T}}\| \leqslant \mu\|\overrightarrow{\mathrm{N}}\|$ s'écrit alors $mg\sin(\alpha) \leqslant \mu mg\cos(\alpha)$, soit $\tan(\alpha) \leqslant \mu$.

(b) Si cette condition n'est pas vérifiée, la caisse possède une accélération non nulle selon $-\overrightarrow{e_x}$ et acquiert donc une vitesse selon $-\overrightarrow{e_x}$. On retrouve le frottement de glissement précédent à la différence que la force $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ change de sens : on a désormais $\|\overrightarrow{\mathrm{T}}\| = +\mu mg\cos(\alpha)$. La loi de la quantité de mouvement s'écrit donc, en projection sur $\overrightarrow{e_x}$:

$$\ddot{x} = -mg\sin(\alpha) + \mu mg\cos(\alpha).$$

Comme on sait que $-\sin(\alpha) + \mu g\cos(\alpha)$ est négatif, on retrouve de nouveau un mouvement uniformément accéléré, selon $-\overrightarrow{e_x}$ cette fois.