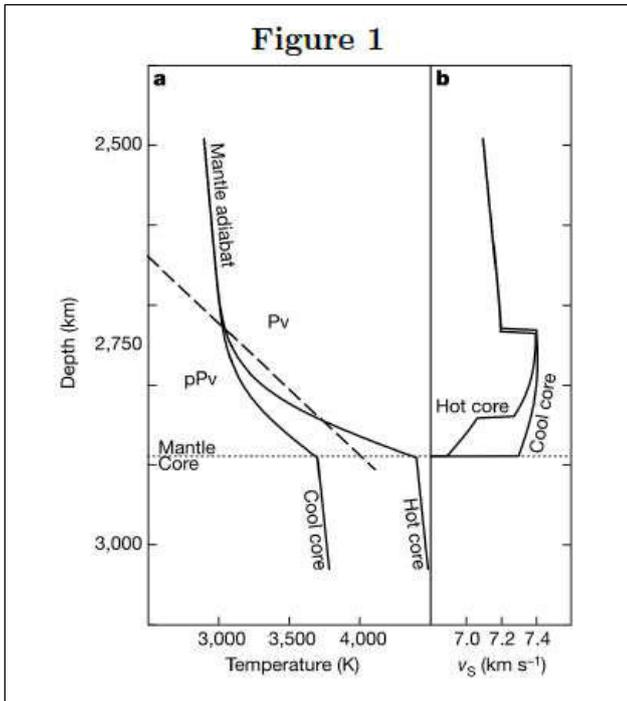


**Physics and Chemistry of the Earth**  
Geophysics Homework

**post-Perovskite lenses, and the structure of the D'' layer**

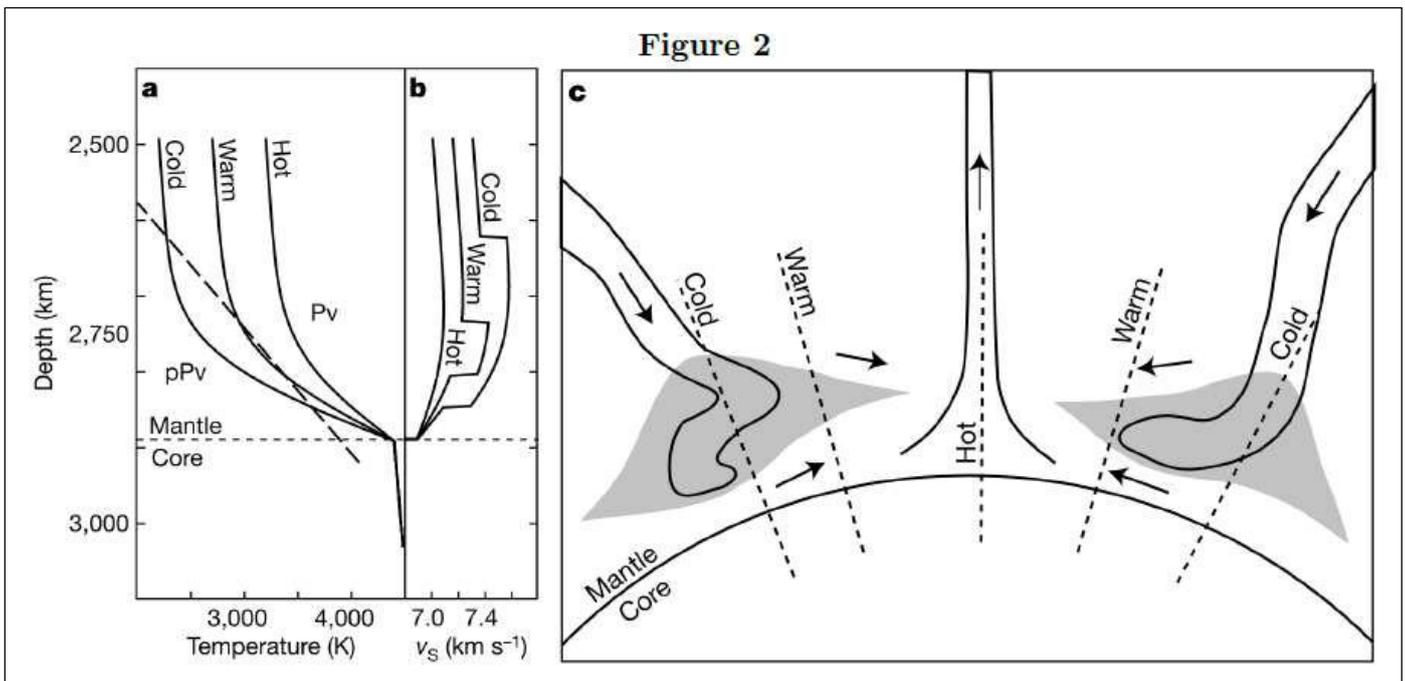
Des discontinuités sismiques ont été observées dans la région D'' (environ 300 km au-dessus de la limite noyau-manteau) depuis des décennies, mais leur origine est restée énigmatique jusqu'à la découverte en 2004 d'une transition de phase à partir de la pérovskite  $MgSiO_3$  ( $P_v$ , également connue sous le nom de bridgmanite) à une nouvelle phase haute pression appelée post-pérovskite ( $pP_v$ ). Le but de ce problème est de montrer comment l'interprétation des discontinuités sismiques en termes de transitions  $P_v/pP_v$  peut fournir de fortes contraintes sur la température et le flux thermique à la limite noyau-manteau (CMB).



**Figure 1** – La relation entre la limite de phase géothermique et  $pP_v$  pour différentes températures centrales (sous-figure **a**) et les profils d'ondes de cisaillement sismiques correspondants (sous-figure **b**). Les géothermies (lignes pleines en **a**) sont tracées suivant une adiabatique moyenne du manteau avec des températures CMB de 3 700 K (noyau froid) et 4 400 K (noyau chaud). La ligne pointillée montre la limite de phase  $P_v/pP_v$ .

**Figure 2** – **a** et **b** : identiques à la figure 1, mais avec un noyau chaud et des profils de température du manteau différents. **c** : un croquis des structures possibles du manteau inférieur dans le cas du noyau « chaud ». La couche  $pP_v$  est représentée en gris clair, les directions schématiques d'écoulement sont indiquées par des flèches et les transects locaux correspondant aux profils du manteau chaud, froid et chaud sont représentés par des lignes pointillées.

D'après Hernlund et al. (2005).



Les valeurs des paramètres physiques utiles sont données dans le tableau 1. Dans tout ce qui suit, la coordonnée  $z$  est définie comme la hauteur au-dessus du CMB (c'est-à-dire que  $z$  est égal à 0 au CMB et augmente vers le haut).

**Table 1** – Physical parameters at conditions of the lowermost mantle.

density	$\rho = 5500 \text{ kg.m}^{-3}$
acceleration of gravity	$g = 10.5 \text{ m.s}^{-2}$
thermal conductivity	$k = 10 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
thermal diffusivity	$\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$
Clapeyron slope of $P_v/pP_v$ transition	$\gamma = 13 \text{ MPa.K}^{-1}$
temperature of $P_v/pP_v$ transition at CMB	$T_{\text{cmb}}^{P_v/pP_v} = 3500 \pm 200 \text{ K}$
core radius	$R_{\text{cmb}} = 3480 \text{ km}$

### 1. Considérations qualitatives

Comme illustré dans les figures 1 et 2, deux modèles qualitativement différents peuvent être proposés pour la structure de la couche D" en fonction de la température  $T_{\text{cmb}}$  à la limite noyau-manteau (CMB), que  $T_{\text{cmb}}$  soit supérieur ou inférieur à  $T^{P_v/pP_v}$ , la température de transition de phase  $P_v/pP_v$ , à la pression de la CMB.

En utilisant les figures 1 et 2, donnez une description qualitative de ces deux modèles. En particulier, discutez dans ces deux scénarios :

- le nombre de discontinuités sismiques qui sont attendues
- la nature de la phase stable à la CMB
- si  $pP_v$  est attendu en tant que couche globale ou en tant que lentilles locales (expliquez pourquoi)
- la relation attendue (qualitative) entre les variations latérales du flux de chaleur (ou du gradient de température) et la ou les profondeurs des discontinuités sismiques
- comment la structure locale différencierait entre les régions de mouvements descendant et ascendant.

### 2. Premières contraintes sur les régions de la limite noyau-manteau à partir de la transition $P_v/pP_v$ .

Les observations sismologiques montrent que le  $pP_v$  est présent dans la couche D" sous forme de lentilles, plutôt que sous forme de couche globale.

(a) Quelle contrainte cela donne-t-il sur la valeur de la température à la CMB ?

On note par  $\gamma = \frac{dP}{dT}$  la pente de Clapeyron de la transition  $P_v/pP_v$ , et par  $k$  la conductivité thermique du manteau inférieur.

(b) En supposant l'équilibre hydrostatique, trouvez le gradient vertical  $dT/dz|_{P_v/pP_v}$  de la température de transition de phase  $P_v/pP_v$ .

(c) Quelle contrainte cela donne-t-il sur le gradient de température, et donc sur le flux de chaleur local à la CMB  $q_{\text{cmb}} = -k \frac{\partial T}{\partial z}|_{\text{cmb}}$ , dans les régions où une lentille  $pP_v$  est observée ? Utilisez les données de la table 1 pour estimer la limite correspondante sur  $q_{\text{cmb}}$ . Et qu'en est-il des régions où aucune transition  $P_v/pP_v$  n'est observée ?

### 3. Modélisation du profil de température dans une région descendante

Nous modélisons maintenant le profil de température  $T(z)$  au-dessus du CMB dans une région d'écoulement descendant (c'est-à-dire une plaque subductée martelant au-dessus du CMB). L'écoulement descendant est caractérisé par une vitesse verticale  $v_z(z)$  (comptée positive dans le cas d'un écoulement descendant). En supposant un état stationnaire, le profil de température résulte d'un équilibre entre l'advection verticale de la chaleur et la diffusion de la chaleur :

$$-\rho c_p v_z(z) \frac{\partial T}{\partial z} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \quad (1)$$

where  $c_p$  is the heat capacity.

On suppose que  $v_z(z) = \dot{\epsilon}z$  à proximité du CMB, où  $\dot{\epsilon} = \frac{dv_z}{dz}$  est la vitesse de déformation, supposée ici constante dans l'espace et dans le temps.

(a) Montrez que l'équation (1) peut être reformulée comme l'équation suivante pour

$$q(z) = -k \frac{\partial T}{\partial z} :$$

$$-\dot{\epsilon}z q(z) = \kappa \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (2)$$

where  $\kappa = k/(\rho c_p)$ .

(b) Vérifier que

$$q(z) = C e^{-\left(\frac{z}{\delta}\right)^2}, \quad \text{where } \delta = \sqrt{\frac{2\kappa}{\dot{\epsilon}}}, \quad (3)$$

est la solution de l'équation (2), avec C une constante d'intégration.

L'intégration de l'équation (3) pour  $q(z)$  par rapport à  $z$  donne

$$T(z) = A \operatorname{erf}(-z/\delta) + B, \quad (4)$$

où la fonction d'erreur  $\operatorname{erf}(x)$  est définie comme

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du, \quad (5)$$

et où A et B sont des constantes d'intégration.

(c) Trouver les expressions de A et B étant donné les conditions aux limites  $T(z=0) = T_{\text{cmb}}$  et  $T(z \rightarrow \infty) = T_m$ , où  $T_m \approx 2500 \text{ K}$  est la température du manteau au-dessus du D" couche.

On rappelle que  $\operatorname{erf}(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{erf}(x) = -1$ .

(d) En utilisant l'expression obtenue pour A, montrer que le flux thermique  $q_{\text{cmb}} = q(z=0)$  au CMB est

$$q_{\text{cmb}} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} k \frac{\Delta T}{\delta}, \quad \text{where } \Delta T = T_{\text{cmb}} - T_m. \quad (6)$$

#### 4. Application du modèle

(a) A l'aide du langage de programmation de votre choix (python, matlab, excel, ...), réalisez une figure montrant :

- la température de la limite  $P_v/pP_v$  en fonction de la hauteur  $z$  au-dessus du CMB.
- le profil de température  $T(z)$  donné par l'équation (4), pour différentes valeurs de  $\dot{\epsilon}$  et  $T_m$  (on peut utiliser des valeurs de  $\dot{\epsilon}$  comprises entre  $5 \times 10^{-17} \text{ s}^{-1}$  et  $5 \times 10^{-16} \text{ s}^{-1}$ , et de  $T_m$  entre 2000 et 3000 K). Pour plus de simplicité, vous pouvez maintenir la température du CMB à une valeur constante égale à 3900 K. En python, la fonction d'erreur peut être obtenue à partir de la bibliothèque scipy (ajouter depuis `scipy.special import erf` lors de l'importation de bibliothèques).

(b) Les images sismologiques du manteau inférieur montrent que là où les lentilles  $pP_v$  sont plus épaisses, leur limite inférieure se trouve à environ 50 km au-dessus du CMB, tandis que leur limite supérieure est à environ 250 km au-dessus du CMB. Essayez de trouver des valeurs de  $T_m$  et  $\dot{\epsilon}$  qui donnent des profils de température en accord avec ces contraintes (vous pouvez utiliser une approche graphique en modifiant les valeurs des paramètres sur la figure construite en question a).

- 
- (c) En utilisant la valeur (ou la plage de valeurs) que vous avez obtenue pour  $\dot{\epsilon}$ , estimez  $v_z$  à  $z = 500 \text{ km}$ . La valeur vous semble-t-elle raisonnable ?
- (d) En utilisant la valeur (ou la plage de valeurs) que vous avez obtenue pour  $\dot{\epsilon}$  et  $T_m$ , estimez  $q_{cmb}$ . Comparez votre résultat avec la contrainte obtenue à la question 2c, et discutez.
- (e) Quel serait le flux thermique moyen horizontal  $\overline{q_{cmb}}$  si le flux thermique total provenant du cœur est  $Q_{cmb} = 10 \text{ TW}$  ? Comparez avec les résultats de la question précédente. Qu'est-ce que cela implique en termes de variations latérales du  $q_{cmb}$  ?