Mesures, incertitudes et approximations

1. Définitions relatives à la mesure d'une grandeur

Mesurer une grandeur, c'est la comparer à une autre grandeur de même nature qui sert d'étalon, de référence, et en exprimer le résultat par un nombre. Cette comparaison constitue la mesure, qui peut être directe ou indirecte.
Mesure directe. Elle s'obtient soit par comparaison directe à l'étalon de référence, soit par utilisation d'un appareil étalonné.
Mesure indirecte. Elle fait intervenir une loi physique qui relie la grandeur à évaluer à des grandeurs connues ou directement mesurables.

2. Erreur de mesure - incertitudes

2.1. Définition

Toute opération de mesure est entachée d'erreurs en raison d'imperfections multiples des conditions de l'expérience, qui dépendent :

- de la méthode de mesure utilisée ;
- de la précision de l'appareil de mesure ;
- de l'opérateur.

C'est la raison pour laquelle la valeur issue de la mesure a toutes les probabilités d'être légèrement différente de sa valeur exacte. L'écart correspondant, compté algébriquement, est appelé erreur. Il est important de déterminer une limite de cette erreur si l'on veut connaître la confiance à accorder à la mesure. Certaines erreurs peuvent être systématiques (par exemple : avance d'une horloge, décalage d'un zéro d'appareil) et donc sont susceptibles d'être corrigées. D'autres, au contraire, résultent de conditions aléatoires (par exemple : position/interprétation de l'opérateur, bruit numérique ...). **Elles ne peuvent être estimées que par une valeur limite maximale la plus probable, positive, désignée sous le nom d'incertitude.**
En l'absence de toute correction, il est nécessaire de déterminer, à partir de la mesure effectuée, dans quelle fourchette se situe la mesure de la grandeur inconnue. On peut alors exprimer le résultat de la mesure sous la forme :

$$x_m - \Delta x \le x \le x_m + \Delta x \text{, où } x = x_m + \varepsilon \Delta x \text{ avec } -1 \le \varepsilon \le 1$$

Une contraction de ces formules fait très souvent écrire les résultats sous la forme :

$$\boxed{x = x_m \pm \Delta x}$$

2.2. Evaluation de l'incertitude sur une mesure directe

Dans certains cas, il est possible de l'obtenir théoriquement par étude systématique de toutes les causes d'erreur. Alternativement, certains constructeurs fournissent une marge d'erreur de l'appareil de mesure. Pour les erreurs aléatoires, il est souvent plus simple de répéter une même mesure plusieurs fois et d'étudier la dispersion des résultats, la valeur la plus probable x_m correspondant alors à la moyenne des mesures.

2.2.1. Cas d'une mesure unique

Lorsqu'une seule mesure est disponible, il est préférable de calculer l'incertitude à partir de la marge d'erreur estimée par le constructeur (incertitude d'étalonnage ou de lecture en fonction du calibre, souvent donnée en pourcentage). Si elle n'est pas connue (ou non disponible), on utilise généralement la moitié de la graduation minimale de l'instrument. Par exemple, pour une mesure effectuée avec un réglet gradué à 1 mm, on prendra une incertitude de ± 0,5 *mm*.

2.2.2. Cas d'un nombre limité de mesures

Lorsqu'un nombre limité de mesures (typiquement moins d'une dizaine) est disponible, il n'est pas rigoureux de s'appuyer sur des lois statiques (voir ci-après) pour calculer l'incertitude. On peut alors estimer (en général surestimer) une incertitude en calculant l'écart maximum à la moyenne :

$$\boxed{\Delta x = \max\left(\left|x_m - x_i\right|_{i=1,n}\right)} \quad \text{(Eq.1)}$$

2.2.3. Cas d'un grand nombre de mesures

Lorsqu'au moins plusieurs dizaines de mesures sont disponibles, on peut alors définir un écart moyen s des mesures par rapport à leur moyenne :

$$s = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_m - x_i\right|}{n}$$, avec n= le nombre de mesures effectuées.

On peut aussi définir un écart quadratique moyen σ, en admettant une répartition gaussienne des écarts autour de la valeur moyenne, que l'on pourra utiliser comme incertitude :

$$\boxed{\Delta x = \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_m - x_i\right)^2}{n}}} \quad \text{(Eq.2)}$$

2.3. Evaluation de l'incertitude sur une mesure indirecte

Dans la plupart des cas, la détermination d'une grandeur x se fait de manière indirecte, c'est-à-dire par application d'une formule faisant dépendre x de paramètres (a, b, ...) indépendants mesurés séparément : $x = f\left(a,b,...\right)$.

Les mesures de a, b, ... sont sujettes à des erreurs diverses Δa, Δb, ...possédant des limites supérieures Δa, Δb, ... (*i.e.* incertitudes) que l'on peut connaître. Le problème consiste alors à en tirer l'incertitude Δx sur x.

2.3.1. Erreurs et incertitudes absolues et relatives

Selon la nature de la relation f utilisée, on peut être amené à utiliser les erreurs et les incertitudes absolues ou relatives.

Erreur absolue. Elle correspond à l'écart $\boldsymbol{\delta x = x - x_m}$. On l'exprime dans la même unité que la grandeur considérée.

Erreur relative. Elle est le quotient $\boldsymbol{\delta x / x}$ de l'erreur absolue δx par la valeur x. Il s'agit d'un nombre sans dimension.

Incertitudes absolue et relative. $\boldsymbol{\Delta x}$ et $\boldsymbol{\Delta x / x}$ sont respectivement les limites supérieures des erreurs absolues et relatives, ayant une probabilité donnée de ne pas être dépassées.

2.3.2. Principe du calcul d'incertitude

Supposons vouloir calculer l'incertitude absolue Δx sur x. Il nous faut préalablement connaître l'ensemble des erreurs δx possibles sur x. On peut ensuite déterminer leur limite supérieure Δx. Les erreurs δa, δb, ... pouvant être considérées comme de faibles accroissements des variables a, b, ... (tout au moins dans le cas de "bonnes" mesures), δx n'est autre que l'accroissement correspondant de f :

$$\delta x = f\left(a+\delta a, b+\delta b,...\right) - f\left(a,b,...\right)$$

dont on sait (voir un cours d'analyse) qu'il peut s'exprimer en fonction des accroissements et des dérivées partielles de f :

$$\delta x = \frac{\partial f}{\partial a}\delta a + \frac{\partial f}{\partial b}\delta b + ...$$

Cette formule, qui permettrait le calcul de δx pour des erreurs δa, δb, ... connues en amplitude et en signe, ne peut s'appliquer que si l'on ne connaît les incertitudes Δa, Δb, ... On obtient une valeur majorée Δx de δx en remplaçant chacun des termes par sa valeur absolue, soit :

$$\Delta x = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\right|\Delta a + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\right|\Delta b + ...$$

2.3.3. Cas particuliers où *f* est une relation simple

Incertitude absolue sur une somme ou une différence :

Si x est relié aux paramètres indépendants mesurés a, b, c, ... par une relation de la forme :

$x = a + b - c...$, alors $\delta x = \delta a + \delta b - \delta c...$ et donc :

$$\boxed{\Delta x = \Delta a + \Delta b + \Delta c + ...} \quad \text{(Eq.3)}$$

L'incertitude absolue sur une somme ou une différence est la **somme** des incertitudes absolues sur chaque terme de la somme ou de la différence. Si l'un des paramètres est pondéré par une constante, ne pas oublier de multiplier l'incertitude par cette constante.

Ainsi, pour $x = K \times \Delta a + K' \times \Delta b + K'' \times \Delta c...$ on aura :

$$\boxed{\Delta x = K \times \Delta a + K' \times \Delta b + K'' \times \Delta c + ...} \quad \text{(Eq.4)}$$

Incertitude relative sur un produit ou un quotient :

Si x est relié aux paramètres indépendants mesurés a, b, c, par une relation de la forme :

$$x = \frac{a \times b}{c}$$

Il est commode d'utiliser les logarithmes et leurs dérivées :

$$\ln x = \ln \frac{a \times b}{c} \Rightarrow \ln x = \ln a + \ln b - \ln c \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{da}{a} + \frac{db}{b} - \frac{dc}{c}$$

En assimilant les différentielles aux erreurs, puis aux incertitudes, on obtient : $\frac{\delta x}{x} = \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta b}{b} - \frac{\delta c}{c}$

et donc :

$$\boxed{\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}} \quad \text{(Eq.5)}$$

L'incertitude relative sur un produit ou un quotient dont les termes sont indépendants est la **somme** des incertitudes relatives sur chaque terme du produit ou du quotient.

Remarques importantes :

- Il arrive que l'une des incertitudes prédomine. Par exemple, si l'incertitude sur a domine largement les incertitudes sur b et c on peut écrire : $\frac{\Delta x}{x} \approx \frac{\Delta a}{a}$
- Lors de votre mesure de a, si vous avez mesuré non pas a mais $A = N \times a$ (par exemple, pour déterminer la période T_0 d'oscillation d'un pendule, vous avez mesuré $10 \times T_0$), vous avez minimisé l'incertitude sur a. En effet, vous devez évaluer l'incertitude ΔA sur la mesure de A et l'incertitude sur a est alors égale à : $\Delta a = \frac{\Delta A}{N}$. On retrouve dans cette formule le fait intuitif que l'incertitude sur la mesure est diminuée en augmentant le nombre de mesures.

2.3.4. Cas particuliers d'une relation linéaire

Dans certains cas, 2 grandeurs x et y sont reliées par une loi linéaire du type $y = f(x)$ avec $y = ax$ où f est une fonction dépendant d'un certain nombre de paramètres et a le coefficient directeur. On mesure une série de n valeurs $x_1, x_2, ...x_n$ et les valeurs correspondantes $y_1, y_2, ...y_n$. Les formules, permettant de déterminer les meilleures valeurs des paramètres de la fonction f à partir de ces mesures dans le cas d'une relation linéaire, peuvent être trouvées dans une source d'information traitant de statistique. Ici, afin de limiter les calculs fastidieux, on se limitera à deux méthodes simples pour extraire l'incertitude d'une droite de régression.

Utilisation d'un tableur. Un logiciel de type tableur permet d'obtenir automatiquement le coefficient directeur a et le coefficient de corrélation r à partir d'une série de N points (x,y). Il est également possible (et plus esthétique) de tracer cette droite de régression dans un graphe et d'y afficher a et r en activant les options correspondantes. On peut alors en déduire l'incertitude de a avec la formule :

$$\boxed{\Delta a = \frac{a}{r}\sqrt{\frac{1-r^2}{N}}} \quad \text{(Eq.6)}$$

A noter : le coefficient de corrélation est marqueur de la qualité de la régression linéaire, il permet de dire si les points ont vraiment une tendance à la linéarité ou pas. r = 0 si les points sont répartis au hasard et r = 1 si les points sont parfaitement alignés. Typiquement, on considérera une régression linéaire acceptable pour $r \geq 0,9$ et de très bonne qualité pour $r \geq 0,99$.

Pentes extrêmes sur rectangles d'incertitude. Lorsque, pour chaque point (x,y), les incertitudes $(\Delta x, \Delta y)$ sont connues, il est possible d'estimer graphiquement l'incertitude Δa sur la pente a à partir des droites de pentes extrêmes. La méthode est la suivante :

- Reporter sur papier millimétré les points de mesure (x_i, y_i). Tracer les zones d'incertitude autour de chaque point. Ce sont des rectangles ou carrés centrés sur les points de largeur $2\Delta x$ et de hauteur $2\Delta y$ (voir figure 2). *Cette méthode fonctionne même si les incertitudes selon un seul des deux axes (x ou y) sont connues, on tracera alors des barres d'incertitude au lieu de rectangles.*
- Tracer la droite de plus grande pente (D1 sur la figure 2) : elle doit passer par tous les rectangles en reliant le coin inférieur droit d'un des rectangles au coin supérieur gauche d'un autre.
- Tracer la droite de plus petite pente (D2 sur la figure 2) : elle doit passer par tous les rectangles en reliant le coin supérieur gauche d'un des rectangles au coin inférieur droit d'un autre.
- Déterminer les pentes a_1 et a_2 de ces deux droites (on pourra prendre les coins de rectangles utilisés pour les tracer).
- En déduire la pente a de la droite la plus probable (D sur la figure 2) et son incertitude Δa :

$$\boxed{a = \frac{a_1 + a_2}{2}} \text{ et } \boxed{\Delta a = \frac{a_1 - a_2}{2}} \quad \text{(Eq.7)}$$

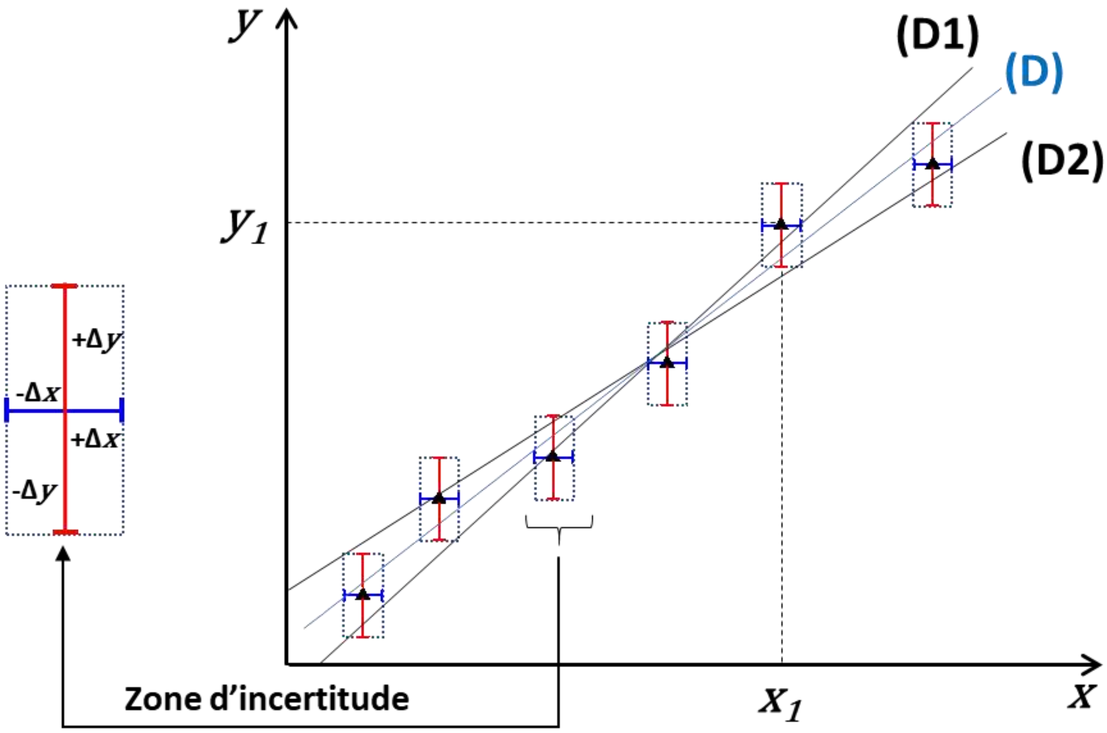

Figure 1 - Incertitude basée sur les pentes extrêmes

Unités, dimensions et constantes

1. Unités du Système International (USI)

Toute grandeur physique peut se mettre sous la forme de produit ou de quotient de grandeurs fondamentales indépendantes auxquelles sont associées une dimension et une unité. Le tableau ci-dessous présente les grandeurs de base du système international ainsi que la décomposition de quelques grandeurs dérivées en fonction des grandeurs de base.

	Grandeur	Formule	Dimension	Unité	Symbole
U. de base	Longueur	l	L	mètre	m
	Masse	m	M	kilogramme	kg
	Temps	t	T	seconde	s
	Intensité de courant	i	I	Ampère	A
	Température	T	-	Kelvin	K
	Quantité de matière	n	-	mole	mol
	Intensité lumineuse	I	-	candela	cd
U. géométriques	Surface	$S = l^2$	L^2	-	m^2
	Volume	$V = l^3$	L^3	-	m^3
	Angle	α	sans	radian	rad
U. cinétiques	Vitesse	$v = \frac{l}{t}$	$L.T^{-1}$	-	$m.s^{-1}$
	Accélération	$a = \frac{v}{t}$	$L.T^{-2}$	-	$m.s^{-2}$
	Fréquence	$f = \frac{1}{T}$	T^{-1}	Hertz	$Hz = s^{-1}$
	Vitesse angulaire	$\omega = \frac{\alpha}{t}$	T^{-1}	-	$rad.s^{-1}$
	Accélération angulaire	$\frac{\omega}{t}$	T^{-2}	-	$rad.s^{-2}$
U. mécaniques	Force	$F = m.a$	$M.L.T^{-2}$	Newton	N
	Travail (énergie)	$W = F.l$	$M.L^2.T^{-2}$	Joule	J
	Puissance	$P = \frac{W}{t}$	$M.L^2.T^{-3}$	Watt	W
	Pression	$P = \frac{F}{S}$	$M.L^{-1}.T^{-2}$	Pascal	Pa
U. électriques	f.e.m. (dif. de pot.)	$U = \frac{P}{i}$	$M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$	volt	V
	Résistance	$R = \frac{U}{i}$	$M.L^2.T^{-3}.I^{-2}$	Ohm	Ω
	Charge	$q = i.t$	T.I	Coulomb	C
	Capacité	$C = \frac{q}{v}$	$M^{-1}.L^{-2}.T^4.I^2$	farad	F
	Inductance	$E = -l\frac{di}{dt}$	$M.L^2.T^{-2}.I^{-2}$	Henry	H
	Flux magnétique	$H = -\frac{d\Phi}{dt}$	$M.L^2.T^{-2}.I^{-1}$	Weber	Wb
	Induction magnétique	$B = \frac{\Phi}{S}$	$M.T^{-2}.I^{-1}$	Tesla	T

2. Multiples et sous-multiples des unités

Préfixes et symboles des principaux multiples et sous-multiples des unités :

facteur	préfixe	symbole	facteur	préfixe	symbole
10^{18}	exa	E	10^{-1}	déci	d
10^{15}	peta	P	10^{-2}	centi	c
10^{12}	téra	T	10^{-3}	milli	m
10^{9}	giga	G	10^{-6}	micro	μ
10^{6}	méga	M	10^{-9}	nano	n
10^{3}	kilo	k	10^{-12}	pico	p
10^{2}	hecto	h	10^{-15}	femto	f
10	déca	da	10^{-18}	atto	a

3. Constantes physiques fondamentales

Le tableau ci-dessous regroupe une grande partie des constantes fondamentales, leurs symboles et valeurs, recommandées par la division de chimie-physique de l'IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry) :

Quantity	symbol	value
permeability of vacuum	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ H.m^{-1} (defined)
speed of light in vacuum	c_0	2.99792458 $\times 10^{8}$ m.s^{-1} (defined)
permittivity of vacuum	ϵ_0	8.854187816 $\times 10^{-12}$ F.m^{-1}
Planck constant	h	6.626 075 5$\times 10^{-34}$ J.s
elementary charge	e	1.602 17733$\times 10^{-19}$ C
electron rest mass	m_e	9.1093897$\times 10^{-31}$ kg
proton rest mass	m_p	1.672 623 1$\times 10^{-27}$ kg
neutron rest mass	m_n	1.674928 6$\times 10^{-27}$ kg
atomic mass constant	$m_u = 1u$	1.6605402$\times 10^{-27}$ kg
Avogadro constant	N_a	6.022 136 7$\times 10^{23}$ mol^{-1}
Boltzmann constant	k	1.380658$\times 10^{-23}$ J.K^{-1}
Faraday constant	F	9.648 530 9$\times 10^{4}$ C.mol^{-1}
gas constant	R	8.314510 J.K^{-1}.mol^{-1}
zero of the Celsius scale		273.15 K (defined)
normal molar volume (ideal gas)	V_m	22.711 08 l.mol^{-1}
standard atmosphere	atm	1013.25 hPa (defined)
fine structure constant	α	7.29735308$\times 10^{-3}$
Bohr radius	a_0	5.29177249$\times 10^{-11}$ m
Hartree energy	E_h	4.3597482$\times 10^{-18}$ J
Rydberg constant	R_∞	1.097 373 153 4$\times 10^{7}$ m^{-1}
Bohr magneton	μ_B	9.2740154$\times 10^{-24}$ J.T^{-1}
electron magnetic moment	μ_e	9.2847701$\times 10^{-24}$ J.T^{-1}
Landé g-factor	g_e	2.002 319 304386
nuclear magneton	μ_n	5.0507866$\times 10^{-27}$ J.T^{-1}
proton magnetic moment	μ_p	1.410 60761$\times 10^{-26}$ J.T^{-1}
proton magnetogyric ratio	γ_p	2.675221 28$\times 10^{8}$ s^{-1}.T^{-1}
Stefan—Boltzmann constant	σ	5.67051$\times 10^{-8}$ W.m^{-2}.K^{-4}
first radiation constant	c_1	3.741 774 9$\times 10^{-16}$ W.m^{2}
second radiation constant	c_2	1.438769$\times 10^{-2}$ m.K
gravitational constant	G	6.67259$\times 10^{-11}$ m^{3}.kg^{-1}.s^{-2}
acceleration of free fall	g_0	9.806 65 m.s^{-2} (defined)