Formules de Taylor - Développements limités

I. Formules de Taylor

1. Formule de Taylor avec reste intégrale

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathfrak{C}^{n+1}$ sur I.
On a alors la formule suivante :
$\forall (a\,,\,b) \in I^2 \;:\; f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx$
C'est la **formule de Taylor avec reste intégrale d'ordre** n.
Le terme $\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx$ est dit le reste intégrale d'ordre n.

Remarque : Formule de "Taylor - Maclaurin"
En posant $b = a + h$, la formule de Taylor avec reste intégrale s'écrit :
$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{h^k}{k!} + \int_a^{a+h} \frac{(a+h-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)dx$
Et en particulier, si $a = 0$ et $h = x$, on obtient ce qu'on appelle la formule de Taylor-Maclaurin :
$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$

Exemples : Pour $a = 0$:
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1} \int_0^n \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin(t)dt$

2. Inégalité de Taylor - Lagrange

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathfrak{C}^{n+1}$ sur I, alors :
$\forall (a\,,\,b) \in I^2 \;:\; \| f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} \| \leqslant M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$ avec : $M = sup\| f^{(n+1)}(x) \|\,,\, x \in [a\,,\,b]$
C'est **l'inégalité de Taylor-Lagrange**.

3. Formule de Taylor - Young

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable au point a.
Alors : $\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^n} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right] = 0$
Et on note : $f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = o_a((x-a)^n)$
C'est la **formule de Taylor - Young**.

Exemples :
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$.

II. Développements limités

1. Généralités

Définition i) :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f admet un **développement limité d'ordre** n **au point** $x_0 = 0$ lorsqu'il existe $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que pour $x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + x^n \epsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$$

et on note : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$

Cette expression s'appelle le développement limité d'ordre n de f au point 0.

Définition ii) :

Soit I un intervalle contenant $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.
On dit que f admet un **développement limité au point** x_0 si la fonction g définie par : $g(x) = f(x + x_0)$ admet un développement limité au point 0.

c'est-à-dire : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n)$

Remarque :
Toute l'étude suivante concerne les développements limités au point 0 mais se généralise aisément d'après la définition ii) précédente aux développements limités au point $x_0 \in I$ quelconque.

Vocabulaire :
Avec les hypothèses et les résultats de la définition i) :

- La partie $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est appelée **la partie régulière** du développement limité.
- La partie $f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est appelée **la partie complémentaire** du developpement limité.

Notation :
L'ensemble des fonctions admettant un developpement limité à l'ordre n en un point x_0 est noté $DL_n(x_0)$.

Proposition :

Si $f \in DL_n(0)$ alors $\forall p \leqslant n \;:\; f \in DL_p(0)$
C'est-à-dire :
Si $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ alors : $\forall p \leqslant n \;:\; f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k + o(x^p)$.

2. Opérations sur les developpements limités

- **Linéarité :**

Soit $n \in \mathbb{N}$, f , $g \in DL_n(0)$ respectivement de parties régulières A , B et $\lambda \in \mathbb{R}$
Alors $f + \lambda g \in DL_n(0)$ de partie regulière $A + \lambda B$.

- **Produit :**

Soit $n \in \mathbb{N}$, f , $g \in DL_n(0)$ respectivement de parties régulières A , B.
Alors $f \times g \in DL_n(0)$ de partie regulière obtenue à partir de $A \times B$ en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n (c'est-à-dire tronqué à l'ordre n).

- **Composition :**

Soit $n \in \mathbb{N}$, f , $g \in DL_n(0)$ avec $f(0) = 0$ respectivement de parties régulières A , B.
Alors $g \circ f \in DL_n(0)$ dont la partie régulière est $B \circ A$ tronqué à l'ordre n.

- **Inverse :**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f \in DL_n(0)$ tel que $f(0) \neq 0$.

Alors $\frac{1}{f} \in DL_n(0)$.

• **Primitive :**

Soit $n \in \mathbb{N}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue avec $f \in DL_n(0)$ de partie régulière $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Alors si F est une primitive de f alors $F \in DL_{n+1}(0)$ avec :
$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1})$.

3. Formule de quelque developpements limités usuels en 0

• $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

• $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

• $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

• $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

• $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

• $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

• $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

• $\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

• $\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

• $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n})$

• $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$

• $\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$

• $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$ avec $a \in \mathbb{R}$

• $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$

• $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{5x^3}{16} + o(x^3)$

• $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$

• $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$

• $\mathrm{Arcsin}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$

• $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$