

# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité diélectrique
4. Polarisation en régime variable
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

- La description (macroscopique) d'un diélectrique à l'aide des charges de polarisation peut s'étendre au cas des polarisations variables dans le temps à condition de considérer des volumes mésoscopiques
- Il faut pour cela que toute dépendance temporelle ait un temps caractéristique inférieur au temps de parcours d'une onde EM sur le volume considéré
- Ceci est correct tant que le temps caractéristique d'évolution du champ est  $<$  au temps de parcours du champ EM sur une distance de quelques nm
  - Avec  $d = 5 \text{ nm}$ ,  $\tau = d/c \Rightarrow \nu = 10^{16} \text{ Hz}$

- Pour un volume de  $5 \text{ nm}^3$ , la fréquence limite est de  $10^{16} \text{ Hz}$ . On pourra donc utiliser une description continue et moyennée de la matière jusque vers  $10^{15}$ - $10^{16} \text{ Hz}$  (EM des milieux continus)
- La description du diélectrique en terme de  $P$  macroscopique est valable jusqu'aux fréquences optiques ( $10^{15}$ - $10^{16} \text{ Hz}$ ) - ie  $\lambda \approx 100 \text{ nm}$ 
  - On peut alors utiliser une description continue de la matière
- La description macroscopique (donc la notion même de permittivité  $\epsilon_r$ ), n'est plus valable dès que  $\lambda$  devient de l'ordre de grandeur des distances interatomiques (ie rayons X pour lesquels  $\lambda < 1 \text{ nm}$ )
  - On ne peut plus ignorer la structure discontinue de la matière

# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité diélectrique
4. Polarisation en régime variable
  1. Analyse intuitive
  2. Modèle de Drüde-Lorentz
  3. Susceptibilités et permittivités complexes
  4. Qu'est-ce qu'une résonance optique ?
  5. Les divers types de polarisation en régime variable
  6. Courant de polarisation - Eq. de Maxwell dans un diélectrique
  7. Cas d'un milieu conducteur
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

## Cas d'une excitation sinusoïdale (1/3)

- Si les variations du champ sont rapides,  $P$  suivra avec un certain retard. La polarisation dépend alors de la valeur du champ en un point, **mais à un instant antérieur**
  - Il n'y a plus proportionnalité entre  $P$  et  $E$
- Néanmoins, en **régime sinusoïdal forcé**,  $P$  et  $E$  varient avec la même pulsation :

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \vec{P}(t) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}_0 \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

- En développant le cosinus :

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \chi'(\omega) \vec{E}_0 \cos(\omega t) + \varepsilon_0 \chi''(\omega) \vec{E}_0 \sin(\omega t)$$

- Il existe donc des fonctions réelles  $\chi'(\omega)$  et  $\chi''(\omega)$

← Déphasage

## Cas d'une excitation sinusoïdale (2/3)

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \chi'(\omega) \vec{E}_0 \cos(\omega t) + \varepsilon_0 \chi''(\omega) \vec{E}_0 \sin(\omega t)$$

- La polarisation comprend un **terme en phase avec  $E$  ( $\chi'$ )** et un **terme en quadrature avec  $E$  ( $\chi''$ )**
- De la même façon, on montre qu'il existe des coefficients réels  $\varepsilon'(\omega)$  et  $\varepsilon''(\omega)$  tels que :

$$\vec{D}(t) = \varepsilon'(\omega) \vec{E}_0 \cos(\omega t) + \varepsilon''(\omega) \vec{E}_0 \sin(\omega t) \quad \text{avec} \quad \varepsilon'(\omega) = \varepsilon_0 (1 + \chi(\omega)) \quad \text{et} \quad \varepsilon''(\omega) = \varepsilon_0 \chi(\omega)$$

- On peut donc décrire la réponse de la matière à un champ variable avec deux fonctions  $\varepsilon'(\omega)$  et  $\varepsilon''(\omega)$ . En particulier, le **déphasage  $\delta(\omega)$**  entre  $D$  et  $E$  vérifie :

$$\tan[\delta(\omega)] = \frac{\varepsilon''(\omega)}{\varepsilon'(\omega)}$$

## Cas d'une excitation sinusoïdale (3/3)

- La représentation complexe est adaptée à tout système linéaire excité en mode sinusoïdal. On écrira :

$$\vec{E}(t) = \text{Re}[\vec{E}_0 \exp(-i \omega t)] \quad \text{et} \quad \vec{P}(t) = \text{Re}[\vec{P}_0 \exp(-i \omega t)]$$

- On a bien une relation de la forme :

$$\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}(\omega) \quad \text{avec} \quad \chi(\omega) = \chi'(\omega) + i \chi''(\omega)$$

- On introduit « naturellement » une susceptibilité complexe

# Retard à la polarisation

- Un retard à la polarisation signifie que  $P(t)$  dépend de  $E$  à un **instant antérieur** :

$$\vec{E}(t-\theta) \quad \text{avec} \quad \theta \geq 0$$

- Si on suppose une relation linéaire entre  $E$  et  $P$ , on pourra écrire :

$$\vec{P}(t) = \epsilon_0 \int_0^\infty F(\theta) \vec{E}(t-\theta) d\theta$$

- Signifie que la contribution à  $P(t)$  de  $E(t-\theta)$  est pondérée par  $F(\theta)$ , caractéristique du diélectrique

- Lien entre  $F(\theta)$  et  $\chi(\omega)$  :  $\vec{P}_\omega(t) = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}_\omega(t)$  avec  $\chi(\omega) = \int_0^\infty F(\theta) e^{i\omega\theta} d\theta$

$$\chi'(\omega) = \int_0^\infty F(\theta) \cos(\omega\theta) d\theta \quad \text{et} \quad \chi''(\omega) = \int_0^\infty F(\theta) \sin(\omega\theta) d\theta$$

- On attend donc un lien entre  $\chi'(\omega)$  et  $\chi''(\omega)$ !

# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité diélectrique
4. Polarisation en régime variable
  1. Analyse intuitive
  2. Modèle de Drüde-Lorentz
  3. Susceptibilités et permittivités complexes
  4. Qu'est-ce qu'une résonance optique ?
  5. Les divers types de polarisation en régime variable
  6. Courant de polarisation - Eq. de Maxwell dans un diélectrique
  7. Cas d'un milieu conducteur
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

# Modèle de Drude-Lorentz (1/2)

- On traduit l'interaction d'un **porteur de charge** avec le reste du milieu matériel par

- Une force **d'amortissement visqueux**  $-\frac{m}{\tau} \vec{v}$

- ▲  $\tau$  est la **durée de collision**, ou **temps de relaxation des vitesses** : après une excitation électrique, le système des charges retrouve une distribution isotrope des vitesses au bout de quelques  $\tau$

- Une force de **rappel élastique**  $-m \omega_0^2 \vec{u}$

- ▲  $\omega_0$  est la **pulsation de l'oscillateur** que forme la charge en mouvement autour de sa position d'équilibre

## Modèle de Drude-Lorentz (2/2)

- Modèle extrêmement simple qui recouvre une grande variété de situations :
  - A basse fréquence, on distingue les **charges libres** pour lesquelles la force de rappel est nulle ( $\omega_0 = 0$ ) et les **charges liées** pour lesquelles cette force est non nulle
  - A plus haute fréquence ( $\omega \gg \omega_0$ ), ceci n'est plus vrai et il devient impossible de distinguer entre charges libres et liées. L'ensemble des charges contribue alors à la polarisation du milieu
  - Possibilité de varier  $\omega_0$  dans une très large gamme de valeurs
  - Egalement appelé **modèle de l'électron élastiquement lié**
  - Le milieu est considéré lhi

# Equation du mouvement (1/2)

- Le PFD appliqué à un porteur de charge  $q$  soumis à un champ EM s'écrit :

$$m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{m}{\tau} \vec{v} - m \omega_0^2 \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{u}}{dt}$$

- Le champ  $E$  est le **champ local** (ie le champ effectivement appliqué à la charge  $q$ )
  - Pour un diélectrique, il faut tenir compte d'une éventuelle correction de champ local dite **correction de Lorentz** (ou de Onsager pour les milieux polaires)
  - Si on ne fait pas cette correction, on suppose implicitement un milieu dilué

## Equation du mouvement (2/2)

- Tant qu'on n'est pas dans un corps ferromagnétique, on aura toujours :

$$\frac{\|\vec{F}_{Magnétique}\|}{\|\vec{F}_{Electrique}\|} = \frac{vB}{E} \approx \frac{v}{c} \ll 1$$

- Egalité stricte pour une onde plane dans le vide. Dans un milieu matériel,  $E/Bc \ll 1$

- Finalement :

$$m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} = q \vec{E} - \frac{m}{\tau} \vec{v} - m \omega_0^2 \vec{u}$$

## Les bases de ce modèle

- Présent modèle : les  $e^-$  de valence des atomes dont le potentiel d'ionisation est faible sont totalement délocalisés dans tout le volume du métal - Drude et Lorentz (1905)
- Les  $e^-$  de conduction remplissent les niveaux énergétiques quantifiés par valeurs croissantes à raison de 2  $e^-$  à spin antiparallèle par état (principe de Pauli) - Sommerfeld (1928)
- La prise en compte des interactions entre  $e^-$  de conduction conduit au modèle de bandes : les énergies possibles sont celles des **bandes permises**, séparées par des **bandes interdites** - Bloch et Brillouin (1930)

# Performances du modèle de Drude-Lorentz

- Le succès de ce modèle vient de sa prédiction de quantités thermiques, électriques et mécaniques
- La conduction dans les métaux est assurée par les électrons libres, ce qui explique le lien entre les conductivités thermique ( $\lambda$ ) et électrique ( $\gamma$ ) :

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{k_B}{e} \right)^2 T = 2.45 \times 10^{-8} T \quad \leftarrow \text{Loi de Wiedemann et Franz}$$

- S'applique si les e- sont uniquement diffusés par les impuretés (sans changement d'énergie), par exemple à basse température. Ne s'applique plus en cas de collisions inélastiques (e- ou phonons)

# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité diélectrique
- 4. Polarisation en régime variable**
  1. Analyse intuitive
  2. Modèle de Drüde-Lorentz
  - 3. Susceptibilités et permittivités complexes**
  4. Qu'est-ce qu'une résonance optique ?
  5. Les divers types de polarisation en régime variable
  6. Courant de polarisation - Eq. de Maxwell dans un diélectrique
  7. Cas d'un milieu conducteur
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

- On considère l'action d'un champ  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i \omega t}$
- Le régime établi correspond à une solution du type  $\vec{u} = \vec{u}_0 e^{-i \omega t}$
- Le PFD entraîne :  $-m \omega^2 \vec{u}_0 = q \vec{E}_0 + i \frac{m}{\tau} \omega \vec{u}_0 - m \omega_0^2 \vec{u}_0$

$$\Rightarrow \vec{u}_0 = \frac{q}{m (\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau})} \vec{E}_0$$

Densité volumique des porteurs de charge



- La polarisation devient :

$$\vec{P} = n q \vec{u} = \vec{P}_0 e^{-i \omega t} \quad \text{avec} \quad \vec{P}_0 = \frac{n q^2}{m (\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau})} \vec{E}_0$$

- On introduit la **susceptibilité complexe**  $\chi(\omega)$  :  $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i \chi''(\omega)$

- Milieu lhi :  $\Rightarrow \vec{P}_0 \equiv \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}_0$

$$\Rightarrow \chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \chi(0) = \frac{n q^2}{m \epsilon_0 \omega_0^2}$$

$\chi(0)$  : susceptibilité  
électrique statique

Savoir  
refaire ce  
calcul

- Le caractère complexe de  $\chi(\omega)$  traduit le déphasage de la réponse du milieu par rapport à l'excitation (ie de  $P$  par rapport à  $E$ )

- Il est équivalent pour un IHI de parler de **susceptibilité complexe**  $\chi(\omega)$  ou de **polarisabilité complexe**  $\alpha(\omega)$  puisque :

$$\chi(\omega) = n \alpha(\omega)$$

- Pour un milieu dense pour lequel on peut utiliser l'expression de Lorentz du champ local, on obtient les mêmes équations en remplaçant  $\omega_0$  par  $\omega'_0$  tel que :

$$\omega'_0 = \omega_0 - \frac{n q^2}{3 m \epsilon_0}$$

- L'étude suivante est donc pertinente car générale !

$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \chi(0) = \frac{n q^2}{m \epsilon_0 \omega_0^2}$$

■ Trois cas limite :

- Basse fréquence ( $\omega \ll \omega_0$ )  $\Rightarrow \chi(\omega) \approx \chi(0)$ 
  - ▲  $P$  est en phase avec  $E$ . On retombe sur le cas des régimes stationnaires pour lesquels  $\chi$  est une constante réelle  $> 0$
  
- Régime intermédiaire ( $\omega \approx \omega_0$ )  $\Rightarrow \chi(\omega) \approx i \omega_0 \tau \chi(0) = \omega_0 \tau \chi(0) \exp\left(i \frac{\pi}{2}\right)$ 
  - ▲  $P$  et  $E$  sont en quadrature
  
- Haute fréquence ( $\omega \gg \omega_0$ )  $\Rightarrow \chi(\omega) \approx -\chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \exp(i \pi)$ 
  - ▲  $P$  et  $E$  sont en opposition de phase

- On décompose  $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i \chi''(\omega)$

$$\chi'(\omega) = \chi(0) \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

$$\chi''(\omega) = \chi(0) \frac{\omega \omega_0^2 / \tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

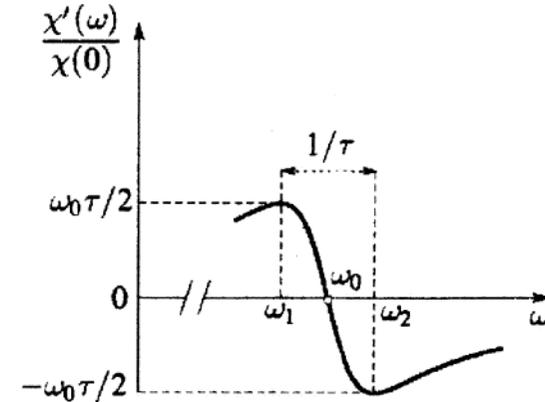
$$\chi'(\omega) = \chi(0) \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

## Etude de $\chi'$

- Dans le cas d'un amortissement faible ( $1/\tau \ll \omega_0$ ) on a au voisinage de  $\omega_0$  : —————

- $\chi'$  s'annule pour  $\omega_0$ . Sa dérivée  $d\chi'/d\omega$  s'annule pour :

$$\begin{cases} \omega_1 \approx \omega_0 - \frac{1}{2\tau} \\ \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{1}{2\tau} \end{cases} \Rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \approx \frac{1}{\tau}$$

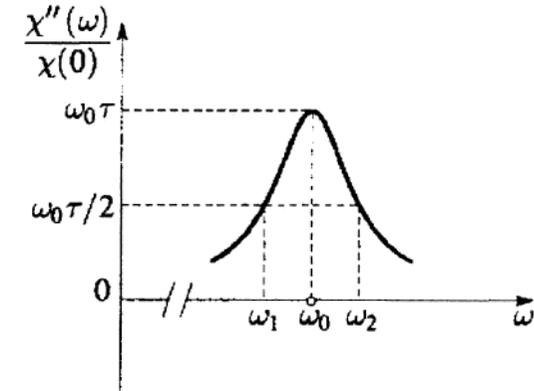


- Le changement de signe de  $\chi'(\omega)$  est très rapide autour de  $\omega_0$

$$\chi''(\omega) = \chi(0) \frac{\omega \omega_0^2 / \tau}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

## Etude de $\chi''$

- Dans le cas d'un amortissement faible ( $1/\tau \ll \omega_0$ ) on a au voisinage de  $\omega_0$  :



- $\chi''$  est maximale pour  $\omega_0$ . Au voisinage de  $\omega_0$ , on a :

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2 \omega_0 (\omega_0 - \omega)$$

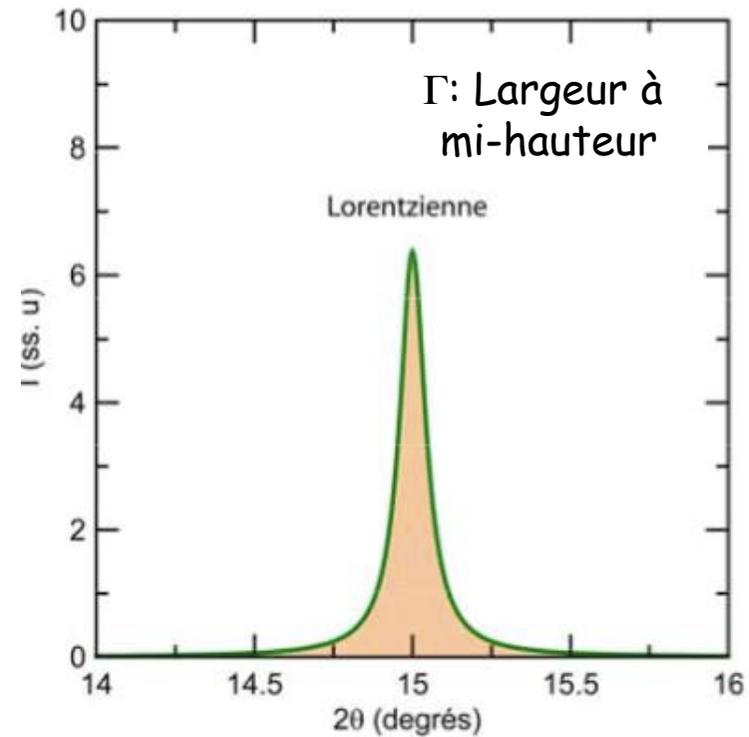
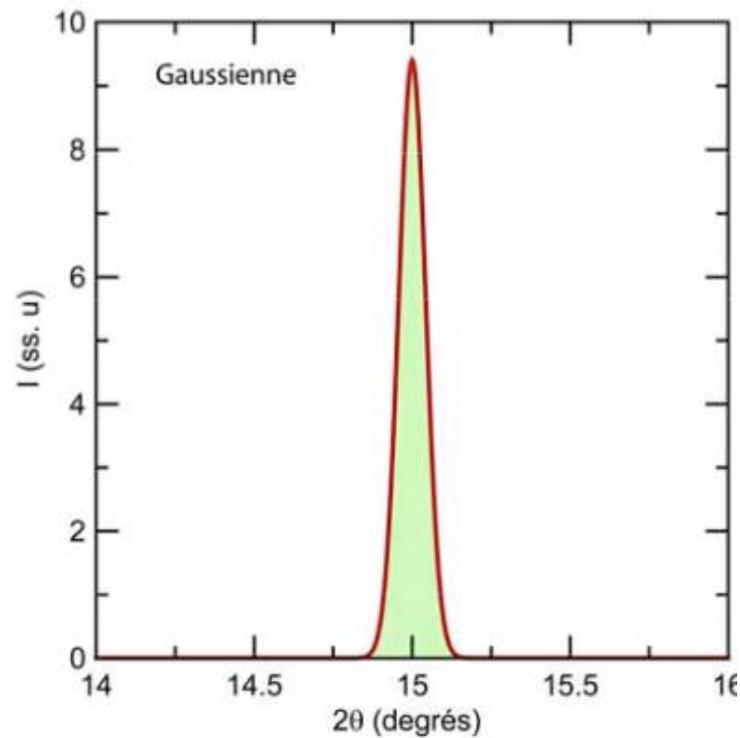
$$\chi''(\omega) \approx \chi(0) \frac{\omega \omega_0^2 / \tau}{4 \omega_0^2 (\omega - \omega_0)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \approx \chi''(0) \frac{1}{1 + 4 \tau^2 (\omega - \omega_0)^2}$$

← Lorentzienne

# Gaussienne vs Lorentzienne

$$\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

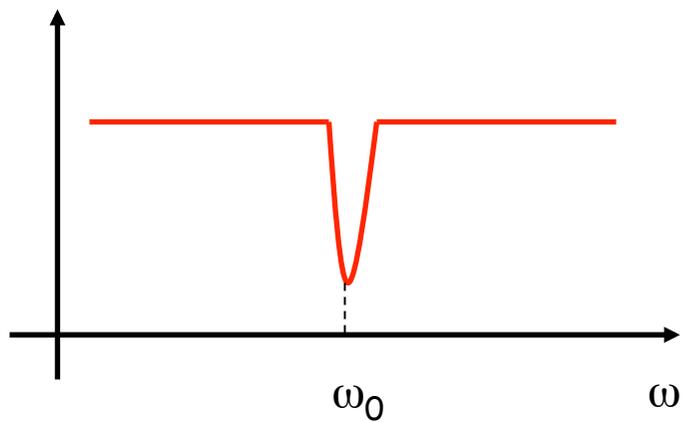
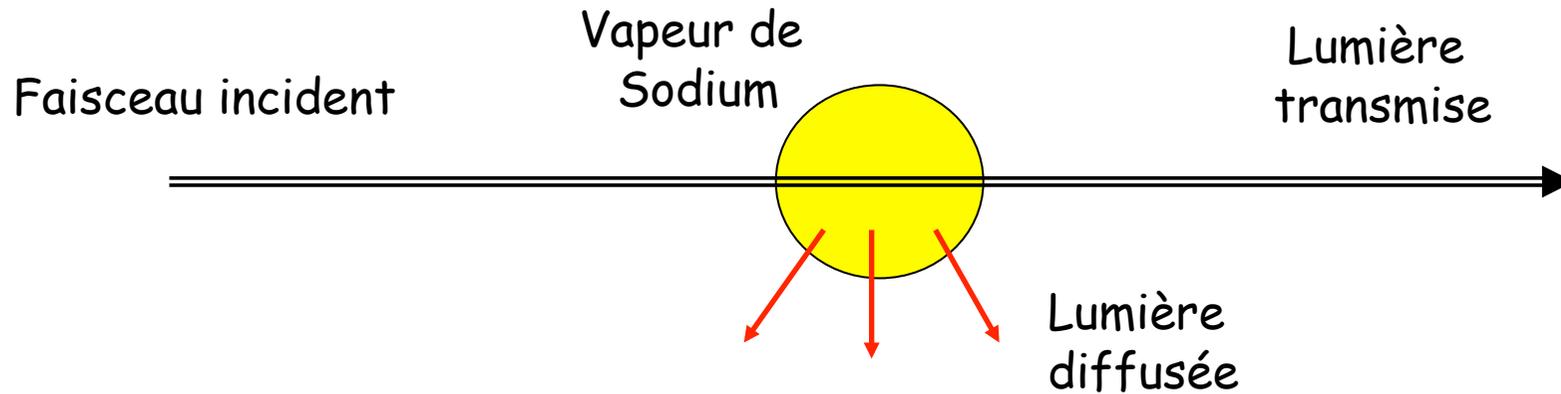
$$\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2 + (x-\mu)^2}$$



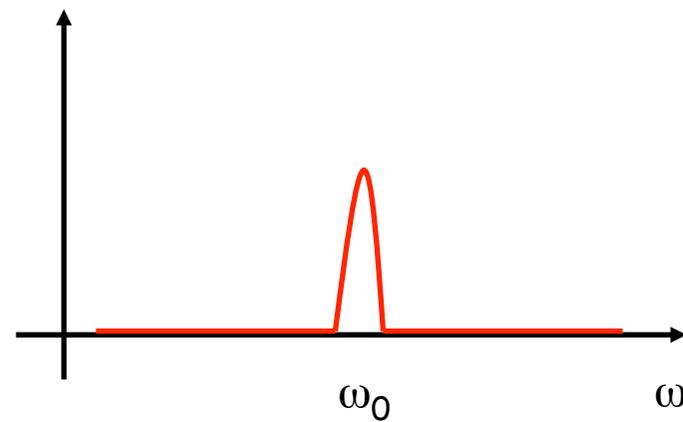
# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité diélectrique
4. Polarisation en régime variable
  1. Analyse intuitive
  2. Modèle de Drüde-Lorentz
  3. Susceptibilités et permittivités complexes
  4. Qu'est-ce qu'une résonance optique ?
  5. Les divers types de polarisation en régime variable
  6. Courant de polarisation - Eq. de Maxwell dans un diélectrique
  7. Cas d'un milieu conducteur
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

# Modèle qualitatif d'une résonance optique (1/2)



Intensité transmise



Intensité diffusée

## Modèle qualitatif d'une résonance optique (2/2)

- Expérimentalement, on constate que le rayonnement réémis a toutes les caractéristiques du rayonnement émis par un dipôle oscillant (diagramme d'émission et polarisation)
- On modélise cet effet en disant que le dipôle atomique se met à vibrer pour  $\omega \approx \omega_0$  et qu'il y a **résonance optique**
- Lorsqu'on coupe brutalement le rayonnement de pulsation  $\omega_0$ , on constate que le rayonnement diffusé décroît avec une constante de temps d'environ  $10^{-8}$  s ( $\gg$  période du rayonnement)
- En résumé, le dipôle atomique se comporte comme un dipôle harmonique très peu amorti

# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité diélectrique

## 4. Polarisation en régime variable

1. Analyse intuitive
2. Modèle de Drüde-Lorentz
3. Susceptibilités et permittivités complexes
4. Qu'est-ce qu'une résonance optique ?
5. Les divers types de polarisation en régime variable
6. Courant de polarisation - Eq. Maxwell dans un diélectrique
7. Cas d'un milieu conducteur

## 5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

# Polarisation des diélectriques en régime sinusoïdal (1/2)

- L'interprétation des propriétés diélectriques des milieux s'appuie sur le modèle de Drude-Lorentz en considérant les mécanismes de polarisation étudiés dans le cas statique
- Dans un milieu dense, le terme de frottement est essentiellement dû aux chocs de l'e- avec d'autres particules. Il rend également compte du rayonnement d'accélération

# Polarisation des diélectriques en régime sinusoïdal (2/2)

- Divers mécanismes peuvent se rencontrer :
  - La **polarisabilité électronique** concerne tous les milieux
  - La **polarisabilité ionique** concerne les milieux présentant des liaisons ioniques
  - La **polarisabilité d'orientation** peut toucher tous les milieux qui possèdent un moment dipolaire permanent
- La **polarisation totale** représente la somme de toutes ces contributions

# Polarisation électronique (1/5)

- Les électrons étant les particules les plus légères, ils sont les seuls à pouvoir « suivre » les variations du champ électromagnétique à très haute fréquence
- Il faut des fréquences « optiques » ( $10^{14}$  à  $10^{16}$  Hz) pour observer les effets d'inertie qui se manifestent à haute fréquence. Cela correspond à  $0.03 < \lambda < 3 \mu\text{m}$  :
  - Suffisamment grand pour qu'on considère le champ constant sur un atome
  - Traitement à l'aide d'un moment dipolaire induit

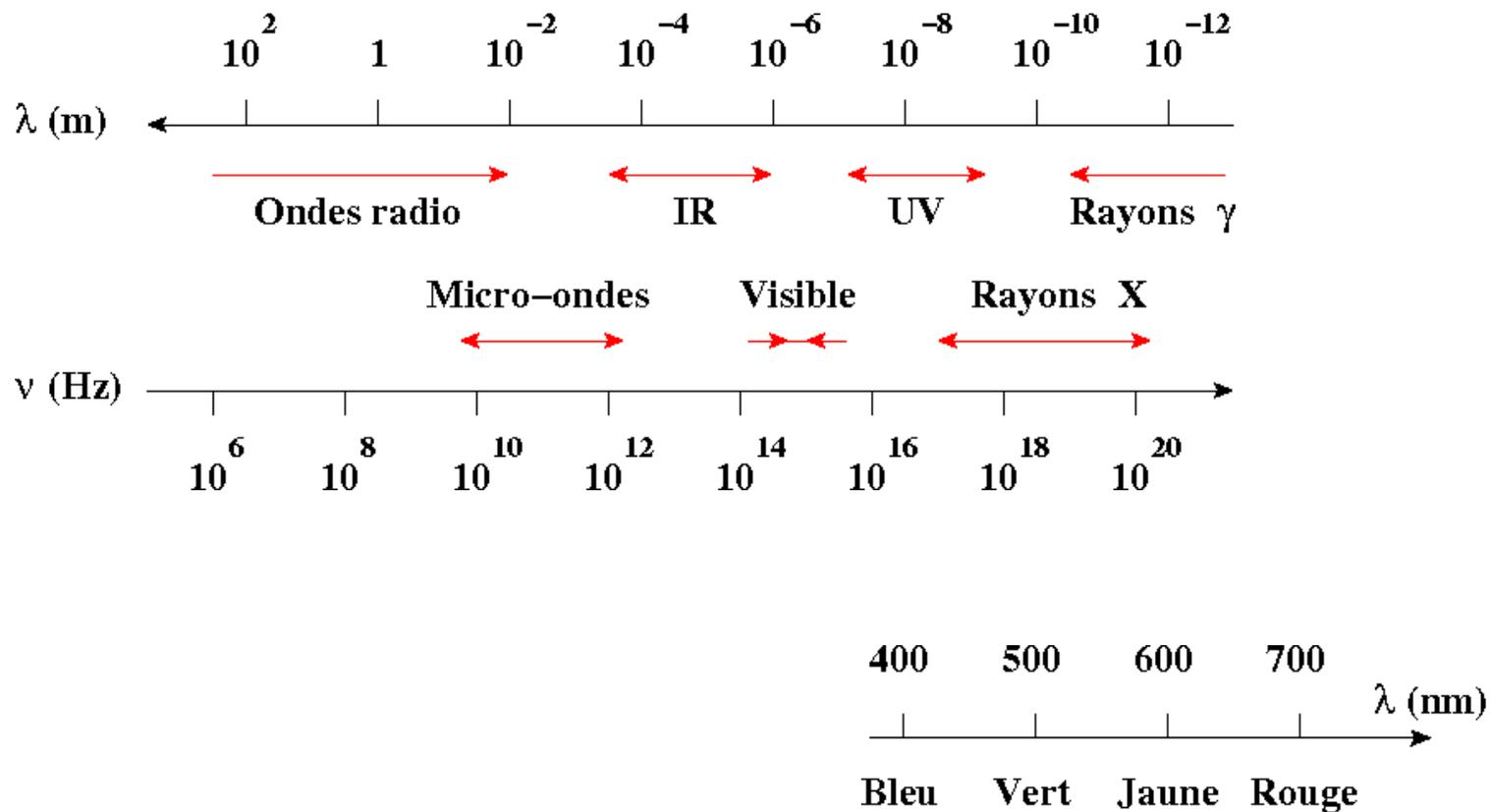
## Polarisation électronique (2/5)

- On applique le modèle de Drude-Lorentz aux pulsations caractéristiques  $\omega_{0,e}$  pour lesquelles on avait obtenu :

$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}$$

- Les processus de relaxation électronique étant très rapides, la condition  $\omega_{0,e} \tau_e \gg 1$  est vérifiée ( $\tau_e$  : durée caractéristique de la polarisation électronique)

# Spectre des UV, IR, ...



$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}$$

## Polarisation électronique (3/5)

- Il y a 2 domaines intéressants :
  - Dans le visible (pour lequel  $\omega \ll \omega_{0,e}$  sans être trop faible néanmoins), la susceptibilité électronique s'écrit :

$$\chi_e(\omega) \approx \chi_e(0) \frac{\omega_{0,e}^2}{\omega_{0,e}^2 - \omega^2}$$

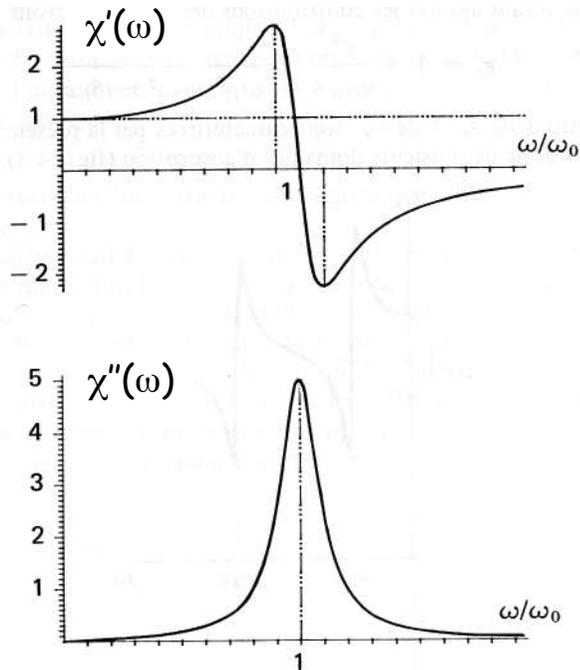
- Dans le domaine des hautes fréquences ( $\omega \gg \omega_{0,e}$ ), la susceptibilité électronique s'écrit :

$$\chi_e(\omega) \approx -\chi_e(0) \frac{\omega_{0,e}^2}{\omega^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

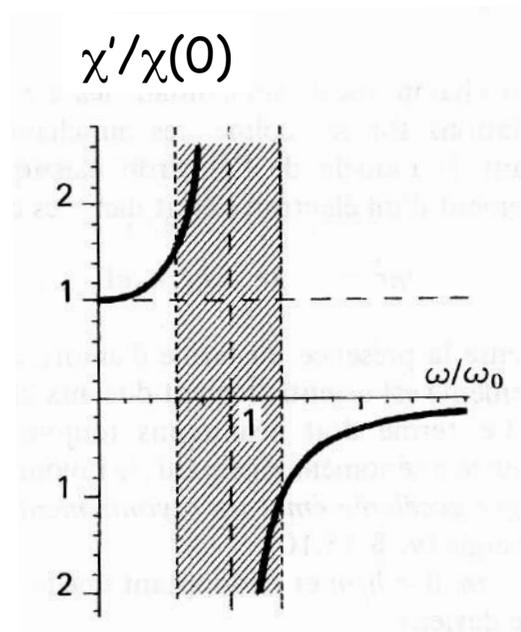
- ▲ Cette susceptibilité est très faible : les électrons ne peuvent plus suivre les variations trop rapides du champ. Le milieu se comporte comme le vide et non plus comme un diélectrique

# Polarisation électronique (4/5)

- On observe donc, au voisinage d'une fréquence de résonance :



La partie réelle décroît beaucoup plus lentement que la partie imaginaire

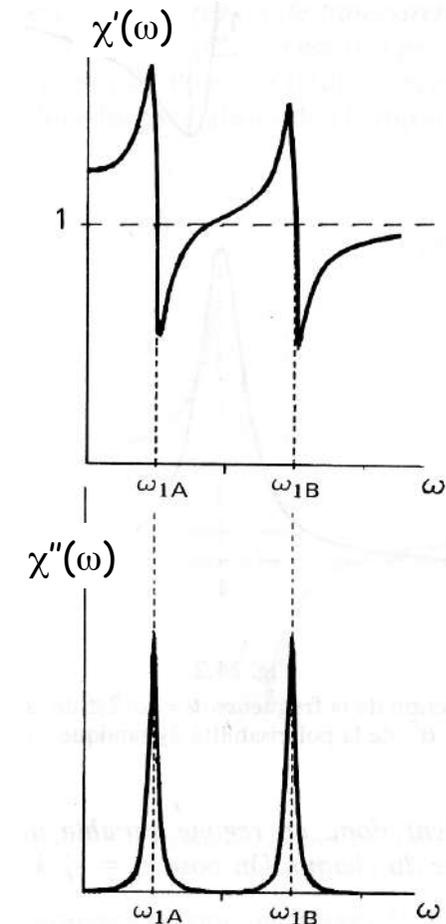


Au voisinage de  $\omega_0$ , l'e- effectue des oscillations de grande amplitude et le milieu prélève au champ une énergie importante

# Polarisation électronique (5/5)

- Pour un atome à 2 électrons, le spectre est typiquement
  - Le maximum de chaque résonance décroît avec  $\omega$

- Remarque :  $H_2$  n'a qu'un  $e^-$  et son spectre comporte néanmoins de nombreuses raies d'absorption
- La MQ précise que chaque  $e^-$  possède plusieurs fréquences de résonance



$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}$$

## Polarisation ionique (1/2)

- Qualitativement, identique à la polarisation électronique
- Les ions d'un cristal forment des oscillateurs qui interagissent avec le champ électromagnétique, mais avec des pulsations propres  $\omega_{0,i}$  très inférieures aux pulsations électroniques
  - Les fréquences propres de vibration des noyaux des molécules sont plutôt dans l'IR lointain (les masses sont  $10^3$  à  $10^5$  fois plus élevées) tandis qu'on est plutôt dans l'UV pour les e-

- Par exemple, les modes qui modifient le dipôle électrique d'une maille peuvent être importants (ex : cristaux d'halogénures d'alcalins) : vibration du réseau des ions « + » wrt à celui des ions « - » telle que le centre de masse de chaque maille reste identique

$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}}$$

## Polarisation ionique (2/2)

- Il y a 2 domaines intéressants :
  - Dans le visible et au delà ( $\omega \gg \omega_{0,i}$ ), la contribution de la polarisation ionique est très faible :

$$\chi_i(\omega) \approx - \chi_i(0) \frac{\omega_{0,i}^2}{\omega^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$$

- ▲ Seuls les effets électroniques sont importants dans le domaine optique
  - Dans le domaine des micro-ondes et en deçà ( $\omega \ll \omega_{0,i}$ ), la susceptibilité d'origine ionique est réelle et pratiquement constante :

$$\chi_i(\omega) \approx \chi_i(0) \frac{\omega_{0,i}^2}{\omega_{0,i}^2 - \omega^2} \approx \chi_i(0)$$

- ▲ C'est le domaine des communications hertziennes

# Polarisation dipolaire (1/4)

- La création d'une polarisation (moyenne) dans les fluides polaires sous l'action d'un champ  $E$  ne peut être instantanée car elle implique la rotation des molécules
  - Cette rotation est perturbée par les chocs entre molécules
  - Son évolution temporelle est donnée par la fonction  $F(\theta)$
- Debye a proposé un retard de la forme  $F(\theta) = a \exp\left(-\frac{\theta}{\tau}\right)$
- On peut montrer que ceci est équivalent à faire dépendre  $P$  de l'équation de Debye :

$$\tau \frac{d\vec{P}}{dt} + \vec{P}(t) = \epsilon_0 \chi_{or}(0) \vec{E}(t) \quad \text{avec} \quad a = \frac{\chi_{or}(0)}{\tau}$$

## Polarisation dipolaire (2/4)

- La polarisation d'orientation concerne les matériaux possédant un moment dipolaire permanent. Dans ce cas, on néglige alors souvent le terme lié à l'accélération devant le terme de frottement : les mécanismes d'amortissement sont prépondérants
  - Dans un liquide tel que l'eau, cet amortissement est dû à la viscosité
- Cela revient à écrire  $\omega^2 \ll \omega/\tau$ , ce qui donne pour la susceptibilité d'orientation :

$$\chi_{or}(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - i \frac{\omega}{\tau}} = \chi_{or}(0) \frac{1}{1 - i \omega \tau_D} \quad \text{en posant} \quad \tau_D = \frac{1}{\omega_0^2 \tau}$$

Durée de Debye

## Polarisation dipolaire (3/4)

- La susceptibilité statique est la même qu'en régime stationnaire :

$$\chi_{or}(0) = \frac{n p_0^2}{3 \varepsilon_0 k_B T}$$

← Moment dipolaire permanent

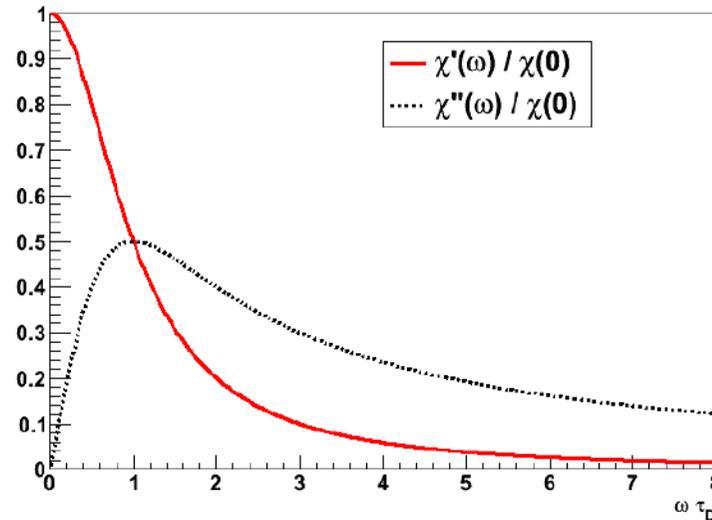
- Les parties réelles et imaginaires de  $\chi_{or}(\omega)$  forment les **équations de Debye** :

$$\chi'_{or}(\omega) = \varepsilon'_r(\omega) - 1 = \chi_{or}(0) \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_D^2} \qquad \chi''_{or}(\omega) = \varepsilon''_r(\omega) = \chi_{or}(0) \frac{\omega \tau_D}{1 + \omega^2 \tau_D^2}$$

- Fonction universelle de  $\omega \tau_D$

# Polarisation dipolaire (4/4)

Parties réelles et imaginaires  
de  $\chi_{or}$  dans le modèle de Debye



- On distingue 2 domaines limite

- $\omega \tau_D \ll 1$  :  $\chi_{or}$  est réelle et égale à sa valeur à basse fréquence

$$\chi'_{or}(\omega) \approx \chi'_{or}(0) \quad \text{et} \quad \chi''_{or}(\omega) \ll \chi''_{or}(0)$$

- $\omega \tau_D \gg 1$  :  $\chi_{or}$  est négligeable : les moments dipolaires ne peuvent plus suivre les oscillations

$$\chi'_{or}(\omega) \ll \chi'_{or}(0) \quad \text{et} \quad \chi''_{or}(\omega) \ll \chi''_{or}(0)$$

# Polarisation dipolaire : exemple de l'eau

## ■ Deux zones limites :

- Basse fréquence ( $\omega \ll 1/\tau \approx 10^{11}$  rad/s):

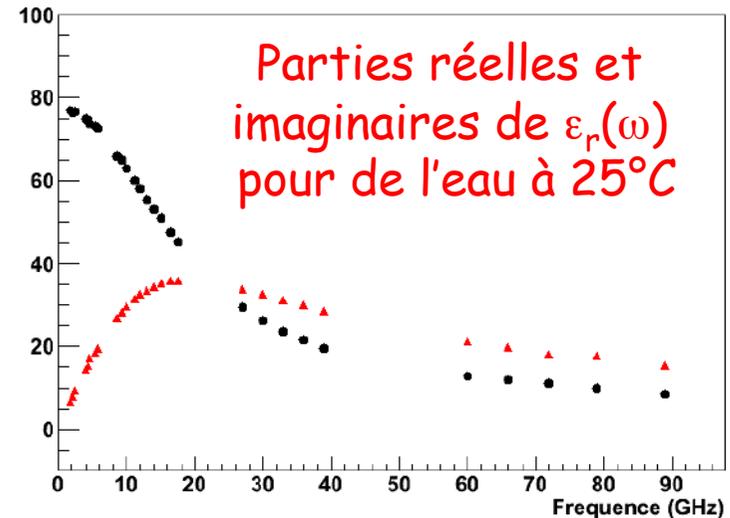
$$\varepsilon'_r(0) = 1 + \chi'_{or}(0) \approx 81$$

- ▲ La constante diélectrique est très élevée à cause des moments dipolaires permanents des molécules

- Haute fréquence :

$$\varepsilon'_r(\omega \rightarrow \infty) \approx 1,8$$

- ▲ La polarisation d'orientation disparaît et seule la polarisation électronique demeure



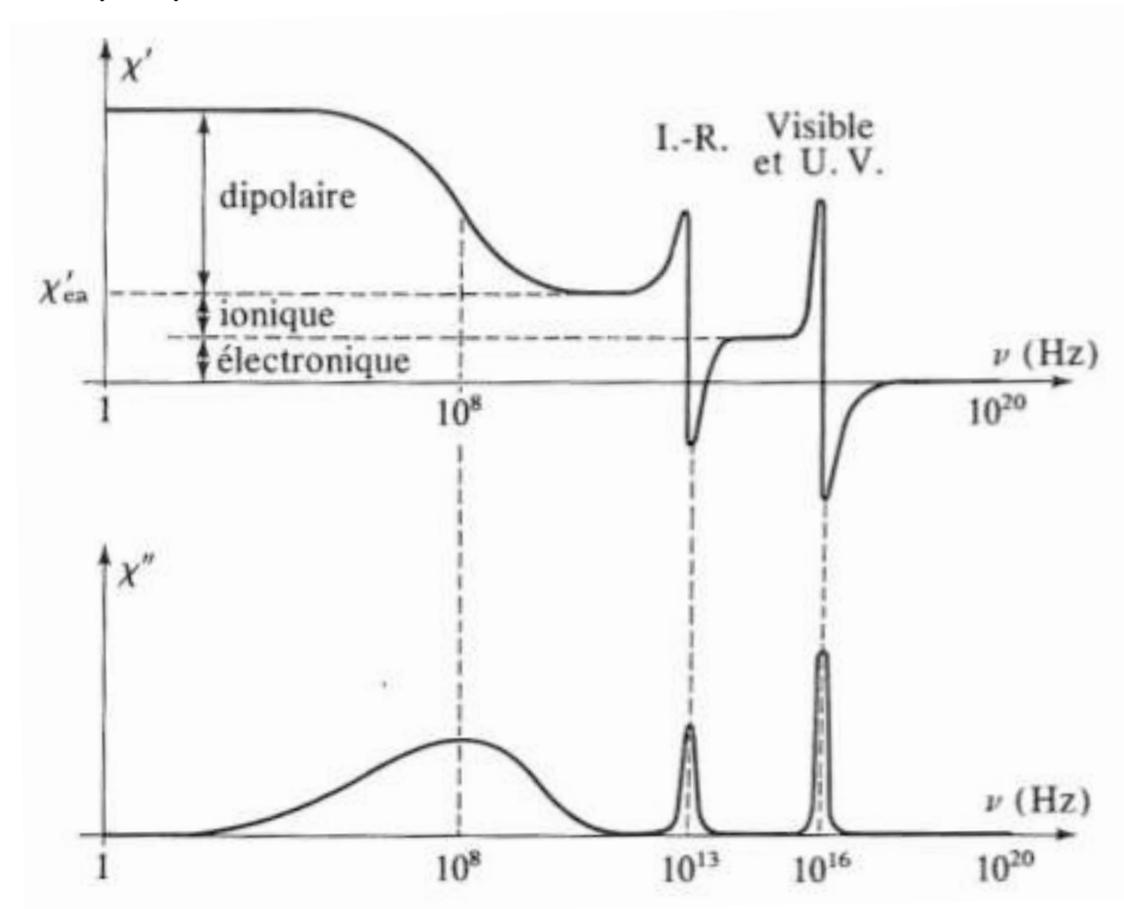
# Polarisation totale d'un diélectrique (1/2)

- Dans un milieu quelconque, tous les mécanismes de polarisation (électronique, ionique et d'orientation) peuvent intervenir
- En régime stationnaire :  $\varepsilon_{Stationnaire} = \varepsilon_r'(0) = 1 + \chi_{or}(0) + \chi_i(0) + \chi_e(0)$
- Dans le domaine du visible ( $\omega_{0,i} \ll \omega \ll \omega_{0,e}$ ) :  $\varepsilon_{Visible} = 1 + \chi_e(\omega)$
- A très haute fréquence ( $\omega_0 \ll \omega$ ) :  $\varepsilon_{\omega \rightarrow \infty} = 1$ 
  - Il n'y a plus de polarisation ....
  - Attention : la notion de  $P$  macroscopique (donc de  $\varepsilon_r$ ) n'a plus de sens pour les RX ( $10^{18}$  Hz)

## Polarisation totale d'un diélectrique (2/2)

Pour un système constitué de molécules polaires, avec une fréquence propre électronique et une fréquence propre de vibration

Les variations de  $\chi'(\omega)$  et  $\chi''(\omega)$  permettent de déterminer les divers types de polarisation



# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité diélectrique
4. Polarisation en régime variable
  1. Analyse intuitive
  2. Modèle de Drüde-Lorentz
  3. Susceptibilités et permittivités complexes
  4. Qu'est-ce qu'une résonance optique ?
  5. Les divers types de polarisation en régime variable
  6. Courant de polarisation - Eq. de Maxwell dans un diélectrique
  7. Cas d'un milieu conducteur
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

## Courant dans un diélectrique (1/2)

- Lorsqu'un diélectrique est soumis à  $E$  variable, les dipôles qui le constituent peuvent se mettre à vibrer et engendrer un courant dont il faut tenir compte pour exprimer les équations de Maxwell

- De façon générale, le vecteur polarisation s'écrit :

$$\vec{P} = \iiint_{\text{Diélectrique}} \rho \overline{OM} dV \quad \text{avec} \quad \iiint_{\text{Diélectrique}} \rho dV = 0$$

- La densité de courant  $\vec{J}_e$  associée au déplacement des charges liées est :

$$\vec{J}_e = \iiint_{\text{Diélectrique}} \rho \frac{d\overline{OM}}{dt} dV = \frac{\partial}{\partial t} \left( \iiint_{\text{Diélectrique}} \rho \overline{OM} dV \right) \Rightarrow \vec{J}_e = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

## Courant dans un diélectrique (2/2)

- $J_e$  s'ajoute aux courants libres :

$$\text{(MA)} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J}_{\text{libre}} + \vec{J}_e) + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J}_{\text{libre}} + \mu_0 \left( \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{J}_{\text{libre}} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- Ceci fournit la signification des « charges liées » : charges dont il faut tenir compte mais qui ne peuvent pas trop (!) s'éloigner de leur position d'équilibre

# Equations de Maxwell dans un diélectrique

- Les équations de Maxwell indépendantes des densités de charges et de courants restent inchangées par rapport au vide

- Finalement :

$$\begin{array}{cccc} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{libre} & \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J}_{libre} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) & \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ (MG) & (MA) & (MF) & (M\Phi) \end{array}$$

- $E$  : Champ électrique (V/m)
- $D$  : Induction électrique (C/m<sup>2</sup>)
- $\rho$  : Densité volumique de charge (C/m<sup>3</sup>)
- $\epsilon_0$  : Permittivité du vide (F/m)
- $B$  : Induction magnétique (T)
- $J$  : Densité volumique de courant (A/m<sup>2</sup>)
- $\mu_0$  : Perméabilité du vide (H/m)

# Plan du chapitre « Milieux diélectriques »

1. Sources microscopiques de la polarisation en régime statique
2. Etude macroscopique de la polarisation en régime statique
3. Susceptibilité diélectrique
4. Polarisation en régime variable
  1. Analyse intuitive
  2. Modèle de Drüde-Lorentz
  3. Susceptibilités et permittivités complexes
  4. Qu'est-ce qu'une résonance optique ?
  5. Les divers types de polarisation en régime variable
  6. Courant de polarisation - Eq. de Maxwell dans un diélectrique
  7. Cas d'un milieu conducteur
5. Aspects énergétiques des milieux diélectriques

# Conductivité complexe (1/5)

- En régime harmonique :  $\vec{J}_e = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = -i \omega \vec{P}$

- Par analogie avec la forme locale de la loi d'Ohm en régime stationnaire, on définit la **conductivité complexe**  $\gamma(\omega)$  par :

$$\vec{J}_e = \gamma(\omega) \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma(\omega) = \gamma'(\omega) + i \gamma''(\omega)$$

- D'où pour un lhi :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \gamma(\omega) = -i \epsilon_0 \omega \chi(\omega)$$

$$\gamma'(\omega) = \epsilon_0 \omega \chi''(\omega) \quad \text{et} \quad \gamma''(\omega) = -\epsilon_0 \omega \chi'(\omega)$$

- **Il est donc équivalent de décrire les propriétés électriques d'un milieu par sa susceptibilité complexe ou par sa conductivité complexe**

## Conductivité complexe (2/5)

$$\gamma'(\omega) = \varepsilon_0 \omega \chi''(\omega) \quad \text{et} \quad \gamma''(\omega) = -\varepsilon_0 \omega \chi'(\omega)$$

- En régime quasi stationnaire, on caractérisera :
  - Les métaux par leur conductivité qui est alors une constante réelle :
$$\gamma(\omega) \approx \gamma(0)$$
  - Les isolants par leur permittivité relative qui est une constante réelle :
$$\varepsilon_r(\omega) \approx \varepsilon_r'(\omega) = 1 + \chi(0)$$
- Les autres matériaux (semiconducteurs, mauvais isolants) se situent entre ces 2 cas limite

## Conductivité complexe (3/5)

- En régime sinusoïdal, on écrit :

$$\vec{J} = \gamma(\omega) \vec{E} = \gamma'(\omega) \vec{E} + i \gamma''(\omega) \vec{E} = \gamma'(\omega) \vec{E} - i \varepsilon_0 \omega \chi'(\omega) \vec{E} = \gamma'(\omega) \vec{E} + \chi'(\omega) \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t}$$

$$(MA) \Rightarrow \vec{\nabla} \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \vec{J} + \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t} = \gamma'(\omega) \vec{E} + (1 + \chi'(\omega)) \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t} = \vec{J}_c + \vec{J}_d$$

□ où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_c = \gamma'(\omega) \vec{E} \end{array} \right.$$

**Courant volumique  
de conduction**

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_d = (1 + \chi'(\omega)) \frac{\partial(\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t} = \varepsilon'(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i \omega \varepsilon'(\omega) \vec{E} \end{array} \right.$$

**Courant volumique  
de déplacement**

## Conductivité complexe (4/5)

$$\vec{J}_c = \gamma'(\omega) \vec{E}$$

$$\vec{J}_d = -i \omega \varepsilon'(\omega) \vec{E}$$

- Le rapport  $J_c/J_d$  permet, à  $\omega$  donné, de qualifier le milieu d'isolant ou de conducteur

$$\frac{\|\vec{J}_c\|}{\|\vec{J}_d\|} = \frac{1}{\omega} \frac{\gamma'(\omega)}{\varepsilon'(\omega)}$$

- Définitions :
  - **Isolant** : quelque soit la valeur de  $E$  (pas trop élevé), les e- restent liés
  - **Conducteur** : il existe des e- libres de se déplacer dans le milieu
  - **Semi-conducteur** : idem isolant mais largeur de bande plus faible : conduction pour quelques e- ou trous

$$\frac{\|\vec{J}_c\|}{\|\vec{J}_d\|} = \frac{1}{\omega} \frac{\gamma'(\omega)}{\epsilon'(\omega)}$$

## Conductivité complexe (5/5)

- On cherche le comportement limite de  $J_c/J_d$

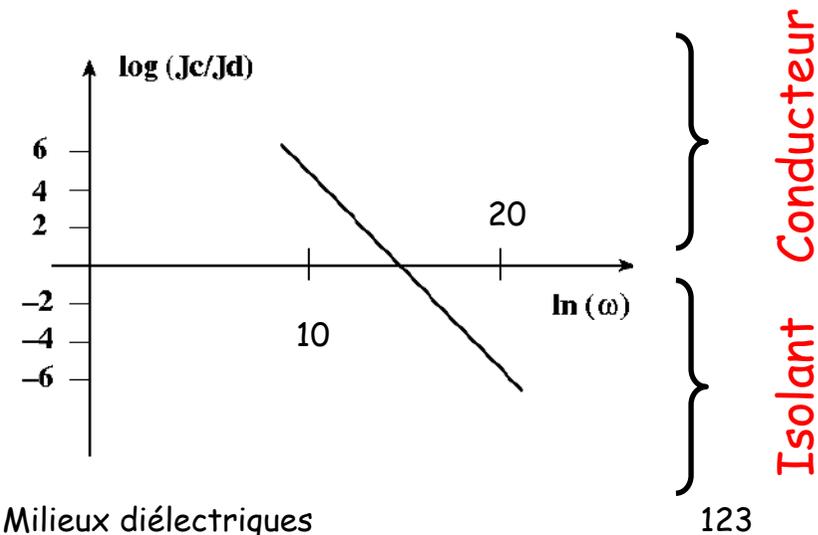
- si  $\|\vec{J}_c\| \gg \|\vec{J}_d\| \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} \approx \mu_0 \gamma'(\omega) \vec{E}$

Le milieu se comporte comme un conducteur caractérisé par sa conductivité réelle  $\gamma'$

- si  $\|\vec{J}_c\| \ll \|\vec{J}_d\| \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{B} \approx \mu_0 \epsilon'(\omega) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Le milieu se comporte comme un isolant caractérisé par sa constante diélectrique réelle  $\epsilon'$

- Selon la fréquence, tout milieu peut être isolant ou conducteur
  - Exemple du Cu : bon conducteur à faible fréquence et isolant à haute fréquence (visible)

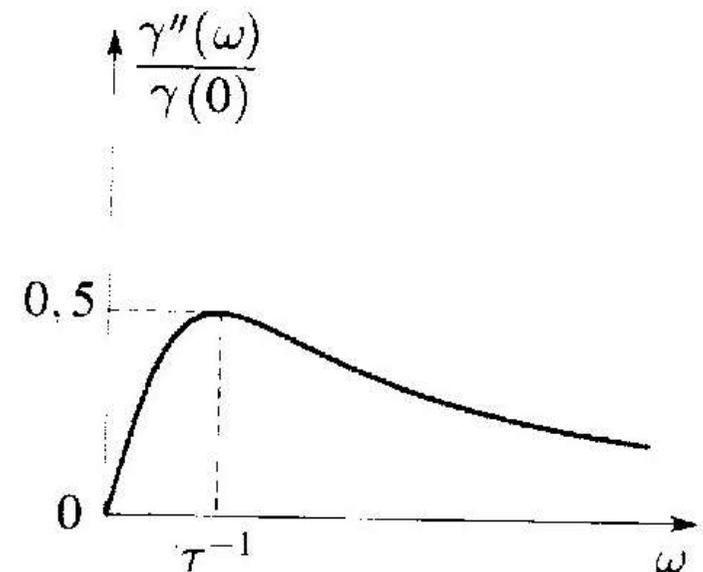
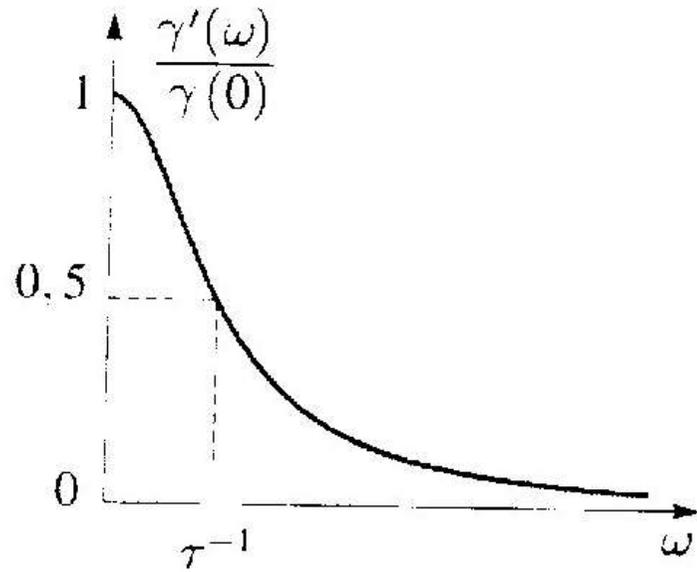


- Dans un conducteur, les charges sont libres et ne sont soumises à aucune force de rappel ( $\omega_0 = 0$  dans le modèle de Drude-Lorentz)
  - Concerne les conducteurs (e- de conduction) et les milieux partiellement conducteur

- On avait : 
$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \chi(0) = \frac{n q^2}{m \varepsilon_0 \omega_0^2}$$

- Après simplification :  $\gamma(\omega) = -i \varepsilon_0 \omega \chi(\omega) = \gamma(0) \frac{1}{1 - i \omega \tau}$  avec  $\gamma(0) = \frac{n q^2 \tau}{m}$ 
  - où  $\gamma(0)$  est la **conductivité en régime stationnaire**

$$\gamma(\omega) = \gamma'(\omega) + i \gamma''(\omega) \Rightarrow \gamma'(\omega) = \gamma(0) \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} \quad \text{et} \quad \gamma''(\omega) = \gamma(0) \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$



## Polarisation totale d'un conducteur (1/2)

- Les charges libres apportent pour un conducteur une contribution supplémentaire (dite de **polarisation globale**) à la polarisation que l'on obtient en faisant  $\omega_0 = 0$  dans l'expression générale de  $\chi$

- On avait :

$$\chi(\omega) = \chi(0) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i \frac{\omega}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \chi(0) = \frac{n q^2}{m \epsilon_0 \omega_0^2}$$

- On en déduit :

$$\chi_e(\omega) = - \frac{\omega_P^2}{\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{i}{\omega \tau}} \quad \text{avec} \quad \omega_P^2 = \frac{n q^2}{m \epsilon_0}$$

Pulsation plasma  
correspondant à  
l'oscillation collective  
des charges libres

## Polarisation totale d'un conducteur (2/2)

$$\chi_e(\omega) = -\frac{\omega_P^2}{\omega^2} \frac{1}{1 + \frac{i}{\omega\tau}}$$

- Deux zones limite
  - Basse fréquence ( $\omega\tau \ll 1$ )

$$\chi_e(\omega) \approx i \frac{\gamma(0)}{\varepsilon_0 \omega} \quad \vec{P} \text{ et } \vec{E} \text{ en quadrature}$$

- Haute fréquence ( $\omega\tau \gg 1$ )

$$\chi_e(\omega) \approx -\frac{\omega_P^2}{\omega^2} \quad \vec{P} \text{ et } \vec{E} \text{ en opposition de phase}$$

# Polarisation totale d'un milieu partiellement conducteur

- Pour un milieu partiellement conducteur, on doit ajouter la contribution  $\chi_e$  des électrons libres à celle  $\chi_i$  des ions
- C'est en particulier le cas pour les semi conducteurs partiellement ioniques (par exemple GaAs)