SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE

I. RAPPELS DE DÉFINITION POUR UN POINT MATÉRIEL

I.1Moment cinétique en A

a) Définition

Soit A un point quelconque qui n'est pas nécessairement fixe.

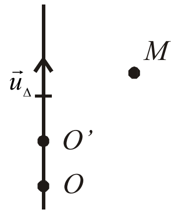
Le moment cinétique en A du point M est : $\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}$.

Unités : kg.m^2.s^{-1}

b) Formule du changement de point

$\vec{\sigma}_{A'} = \overrightarrow{A'M} \wedge m\vec{v} = \left(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge m\vec{v}$, d'où $\boxed{\vec{\sigma}_{A'} = \vec{\sigma}_A + \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{p}}$.

I.2 Moment cinétique par rapport à un axe orienté



a) Définition

Soit Δ un axe orienté. L'orientation de l'axe est donnée par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$.

Soit O un point quelconque de l'axe.

Le moment cinétique de M par rapport à l'axe Δ est : $\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_O \cdot \vec{u}_\Delta$.

On vérifie que cette définition est indépendante du point O sur l'axe : $\vec{\sigma}_{O'} \cdot \vec{u}_\Delta = \left(\vec{\sigma}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}\right) \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{\sigma}_O \cdot \vec{u}_\Delta + 0$ car $\left(\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}\right) \perp \vec{u}_\Delta$.

b) Cas particulier des coordonnées cylindriques

On choisit l'axe Oz tel que $\vec{u}_z = \vec{u}_\Delta$.

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$

On a donc : $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z_r \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} m\dot{r} \\ mr\dot{\theta} \\ m\dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ... \\ ... \\ mr^2\dot{\theta} \end{vmatrix}$, soit $\boxed{\sigma_\Delta = \sigma_z = mr^2\dot{\theta}}$.

I.3 Moment en A d'une force

Soit A un point quelconque qui n'est pas nécessairement fixe.

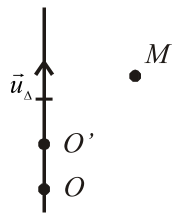
Le moment en A de la force $\vec{f}$ appliquée en M est : $\vec{\Gamma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}$.

Unités : N.m

Formule du changement de point : $\vec{\Gamma}_{A'} = \overrightarrow{A'M} \wedge \vec{f} = \left(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM}\right) \wedge \vec{f} = \vec{\Gamma}_A + \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{f}$

$\boxed{\vec{\Gamma}_{A'} = \vec{\Gamma}_A + \overrightarrow{A'A} \wedge \vec{f}}$

I.4 Moment d'une force par rapport à un axe orienté



a) Définition

Soit Δ un axe orienté. L'orientation de l'axe est donnée par le vecteur unitaire $\vec{u}_\Delta$.

Soit O un point quelconque de l'axe.

Le moment de la force par rapport à un axe orienté Δ est : $\Gamma_\Delta = \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{u}_\Delta$

On vérifie que cette définition est indépendante du point O sur l'axe : $\vec{\Gamma}_{O'} \cdot \vec{u}_\Delta = \left(\vec{\Gamma}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{f}\right) \cdot \vec{u}_\Delta = \vec{\Gamma}_O \cdot \vec{u}_\Delta + 0$ car $\left(\overrightarrow{O'O} \wedge \vec{f}\right) \perp \vec{u}_\Delta$.

b) Cas particulier des coordonnées cylindriques

On choisit l'axe Oz tel que $\vec{u}_z = \vec{u}_\Delta$.

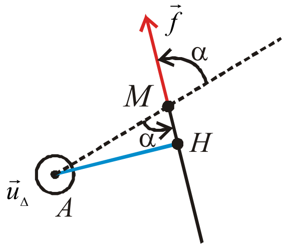
$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$ et $\vec{F} = F_r\vec{u}_r + F_\theta\vec{u}_\theta + F_z\vec{u}_z$

On a donc : $\vec{\Gamma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ z_r \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ... \\ ... \\ rF_\theta \end{vmatrix}$, soit $\boxed{\Gamma_\Delta = \Gamma_z = rF_\theta}$.

Les composantes radiale $\vec{F}_r$ et axiale $\vec{F}_z$ ne contribuent pas au moment par rapport à l'axe.

Γ_Δ est donc le produit de la composante orthoradiale multipliée par la distance r (ou longueur du bras de levier). C'est prévisible car $\vec{F}_r$ est sans effet sur le rotation d'une porte, $\vec{F}_z$ tend à soulever celle-ci et $\vec{F}_\theta$ tend à provoquer la rotation de celle-ci.

c) Cas particulier d'une force perpendiculaire à l'axe Δ



$\vec{\Gamma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}$

La norme du moment de la force vaut : $\left\|\vec{\Gamma}_A\right\| = \left\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{f}\right\| = AM \left\|\vec{f}\right\| \left|\sin\alpha\right|$

On définit H le projeté orthogonal de A sur la droite $\left(M, \vec{f}\right)$.

On a alors : $\left|\sin\alpha\right| = \dfrac{AH}{AM}$, d'où

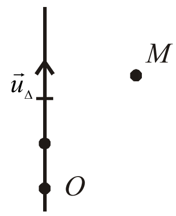
$\left\|\vec{\Gamma}_A\right\| = AH\left\|\vec{f}\right\|$ = force × longueur du bras de levier (distance AH).

Comment déterminer le signe + ou – pour Γ_Δ ?

On peut appliquer la règle de la main droite : les 4 doigts de la main sont dans la direction de $\overrightarrow{AM}$, la paume de la main est dans la direction de $\vec{f}$. Le pouce donne la direction de $\vec{\Gamma}_A$. Si $\vec{\Gamma}_A$ et $\vec{u}_\Delta$ sont dans le même sens, il faut mettre un signe +, sinon il faut mettre un signe –.

Sur le schéma $\Gamma_\Delta = +AH\left\|\vec{f}\right\|$ = force × longueur du bras de levier (distance AH).

II. MOMENT CINÉTIQUE D'UN SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE PAR RAPPORT À CELUI-CI



Soit Δ un axe orienté. On utilise les coordonnées cylindriques avec $\vec{u}_z = \vec{u}_\Delta$.

II.1 Moment cinétique par rapport à un axe pour un système de points matériels

On a vu dans le paragraphe précédent que pour un point matériel : $\sigma_z = \sigma_\Delta = mr^2\dot{\theta}$.

Pour un système de k points matériels, le moment cinétique du système par rapport à l'axe Δ vaut :

$$\boxed{\sigma_\Delta = \sum_{i=1}^{k} m_i r_i^2 \dot{\theta}_i}$$

II.2 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

On considère le cas particulier d'un solide en rotation autour de l'axe Δ. Les distances mutuelles des différents éléments restent constantes au cours du temps. La vitesse angulaire $\dot{\theta}_i$ est la même pour tous les points matériels. On a donc $\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = ... = \dot{\theta}_i = \dot{\theta}_k = \dot{\theta} = \omega$. On note ω la vitesse angulaire commune à tous les points matériels.

On a donc : $\sigma_\Delta = \sum_{i=1}^{k} m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_{i=1}^{k} m_i r_i^2\right)\omega$.

a) Définition du moment d'inertie

On définit le **moment d'inertie** J_Δ du solide par rapport à l'axe Δ : $J_\Delta = \sum_{i=1}^{k} m_i r_i^2$.

Le **moment cinétique** du solide en rotation vaut donc : $\sigma_\Delta = J_\Delta \omega$.

Unités du moment d'inertie : kg.m^2.

Le moment d'inertie ne dépend que de la forme de solide et de la répartition de masse à l'intérieur de son volume. Le moment d'inertie est d'autant plus grand que le solide est plus massif et que la masse y est distribuée à grande distance de l'axe de rotation.

La relation $J_\Delta = \sum_{i=1}^{k} m_i r_i^2$ définit le moment d'inertie pour un système discret de points matériels.

b) Moment d'inertie pour un système continu de points matériels

On considère une distribution volumique de masse. Soit un volume $\mathrm{d}\tau$. Il contient une masse dm qui est à la même distance r de l'axe. Le moment d'inertie de ce volume $\mathrm{d}\tau$ vaut : $r^2\mathrm{d}m$. Pour calculer le moment d'inertie du volume entier, il faut donc faire la somme de toutes les contributions.

Pour une **distribution volumique**, on écrit une intégrale triple, soit $J_\Delta = \iiint_V r^2\mathrm{d}m$

Pour une distribution surfacique, $J_\Delta = \iint_S r^2\mathrm{d}m$

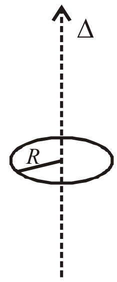
Pour une distribution linéïque, $J_\Delta = \int r^2\mathrm{d}m$

Les calculs de moment d'inertie ne sont pas au programme. On va juste calculer trois moments d'inertie. Dans les exercices, on donne l'expression littérale du moment d'inertie si nécessaire ou sa valeur numérique.

c) Moment d'inertie d'une circonférence par rapport à son axe

On considère une circonférence homogène (ou cercle) de rayon R et de masse M.

$$J_\Delta = \int r^2\mathrm{d}m = \int R^2\mathrm{d}m = R^2\int \mathrm{d}m = MR^2$$



d) Moment d'inertie d'un cylindre homogène de révolution par rapport à son axe

On considère un cylindre homogène de rayon R et de hauteur h.

On utilise les coordonnées cylindriques pour décrire le cylindre.

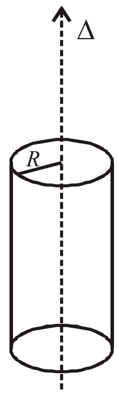
La masse volumique est $\mu = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau}$.

La masse d'un petit volume $\mathrm{d}\tau$ est $\mathrm{d}m = \mu\mathrm{d}\tau = \mu(\mathrm{d}r)(r\mathrm{d}\theta)(\mathrm{d}z)$.

Le moment d'inertie du cylindre est : $J_\Delta = \iiint_V r^2\mathrm{d}m$

$$J_\Delta = \iiint_V r^2\mu(\mathrm{d}r)(r\mathrm{d}\theta)(\mathrm{d}z) = \mu\left(\int_{r=0}^{R} r^3\mathrm{d}r\right)\left(\int_{\theta=0}^{2\pi}\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{z=0}^{h}\mathrm{d}z\right) = \mu\frac{R^4}{4}2\pi h = \mu\frac{\pi R^4}{2}h$$

La masse totale vaut : $M = \mu\pi R^2 h$, d'où $\boxed{J_\Delta = \frac{1}{2}MR^2}$.



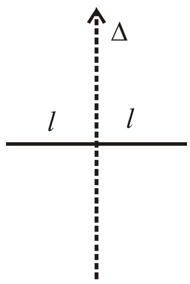
Le coefficient ½ traduit le fait que les masses sont toutes situées à une distance de l'axe inférieure à R. Le cylindre a même moment d'inertie qu'une circonférence de rayon $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$ *appelé rayon de giration du solide.*

e) Moment d'inertie d'une barre homogène filiforme par rapport à sa médiatrice

On définit la masse linéïque λ par $\lambda = \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}r}$

$$J_\Delta = \int r^2\mathrm{d}m = 2\int_{r=0}^{l} r^2\lambda\mathrm{d}r = 2\lambda\frac{l^3}{3}.$$

La masse totale vaut $M = \lambda 2l$, d'où $\boxed{J_\Delta = \frac{1}{3}Ml^2}$.



III. THÉORÈMES DU MOMENT CINÉTIQUE

III.1 Théorème du moment cinétique en projection sur un axe fixe

Soit Δ un axe orienté fixe dans un référentiel $\Re$ **galiléen.**

Théorème du moment cinétique en projection sur Δ : $\dfrac{\mathrm{d}\sigma_\Delta}{\mathrm{d}t}=\Gamma_\Delta$

III.2 Théorème du moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe

Pour un solide en rotation, on a vu que : $\sigma_\Delta = J_\Delta \omega$. Le moment d'inertie est constant. On peut donc le sortir de la dérivée.

Soit Δ un axe orienté fixe dans un référentiel $\Re$ **galiléen.**

Théorème du moment cinétique pour solide en rotation autour d'un axe Δ : $J_\Delta \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\Gamma_\Delta$

Attention à l'orientation : Si θ augmente, en appliquant la règle de la main droite, le pouce doit être dirigé dans le sens de $\vec{u}_\Delta$ sinon il faut écrire $-J_\Delta \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\Gamma_\Delta$!!!

IV. ÉNERGIE CINÉTIQUE ET PUISSANCE DES FORCES POUR UN SOLIDE

IV.1 Énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe

La vitesse d'un point matériel *i* vaut : $\vec{v}_i = r_i\omega\vec{u}_{\theta_i}$. L'énergie cinétique du point *i* vaut : $E_{c_i}=\dfrac{1}{2}m_i v_i^2=\dfrac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2$.

L'énergie cinétique du solide vaut : $E_c=\displaystyle\sum_{i=1}^{k}E_{c_i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2=\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$.

L'énergie cinétique d'un solide en rotation vaut : $E_c=\dfrac{1}{2}J_\Delta\omega^2$

IV.2 Puissance des forces appliquées à un solide en rotation autour d'un axe fixe

Pour un point matériel, la puissance de la force vaut : $P_i=\vec{F}_i\cdot\vec{v}_i=\left(F_{ir}\vec{u}_r+F_{i\theta}\vec{u}_\theta+F_z\vec{u}_z\right)\cdot\left(r_i\omega\vec{u}_\theta\right)=F_{i\theta}r_i\omega=\Gamma_i\omega$

La puissance des forces appliquées à un solide en rotation vaut donc : $P=\Gamma\omega$

en notant Γ_Δ la somme des moments des forces appliquées au solide par rapport à l'axe Δ.

V. GRANDEURS ET RELATIONS HOMOGUES RELATIVES AUX VARIABLES LINÉAIRES ET ANGULAIRES

On va donner une analogie formelle entre une solide en rotation autour d'un axe Δ et un point matériel de masse *m* de mouvement rectiligne suivant l'axe *Ox*.

$$x\to\theta \quad ; \quad v=\dot{x}\to\omega=\dot{\theta} \quad ; \quad \ddot{x}\to\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\ddot{\theta}$$

$$m\to J_\Delta \quad ; \quad p_x=mv\to\sigma_\Delta=J_\Delta\omega \quad ; \quad E_c=\frac{1}{2}mv^2\to E_c=\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$$

$$F\to\Gamma_\Delta \quad ; \quad m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F\to J_\Delta\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\Gamma_\Delta \quad ; \quad P=Fv\to P=\Gamma_\Delta\omega$$

On retient l'analogie avec $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F\to J_\Delta\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\Gamma_\Delta$.

Les autres relations s'en déduisent immédiatement.

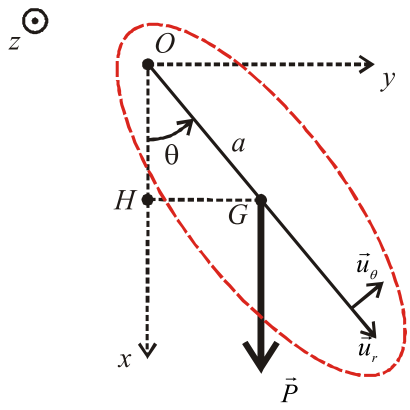
Exemple pour un ressort de force de rappel $-kx$ et un ressort linéaire de torsion qui tordu d'un angle θ exerce un moment de rappel $\Gamma_\Delta=-C\theta$ avec $C=$ constante de torsion.

$$k\to C \quad ; \quad F=-kx\to\Gamma_\Delta=-C\theta \quad ; \quad E_p=\frac{1}{2}kx^2\to E_p=\frac{1}{2}C\theta^2$$

VI. LE PENDULE PESANT

VI.1 Modélisation

- Système = Solide de masse M et de moment d'inertie J_Δ supposé connu. Le centre d'inertie G du solide est à la distance a de l'axe de rotation.
- Référentiel $\Re = \left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ terrestre galiléen. On repère la position du solide par l'angle θ. On vérifie avec la règle de la main droite que si θ augmente, le pouce est bien dirigé suivant $\vec{u}_z = \vec{u}_\Delta$.
- Bilan des forces :
  - Les forces de pesanteur sont équivalentes pour un solide à une **force unique appliquée** en G égale à $\vec{P} = Mg\vec{u}_x$.
  - On suppose qu'on a une **liaison pivot parfaite**. Une liaison pivot autorise uniquement un mouvement de rotation autour d'un axe fixe Δ. Si cette liaison est parfaite, le moment est nul par rapport à l'axe Δ : $P(\text{liaison}) = \Gamma_\Delta(\text{liaison})\,\omega = 0$



VI.2 Étude dynamique

- Le moment de l'action de liaison est nul.
- Le moment du poids peut se calculer avec le produit **force × longueur du bras de levier** = $mg \times HG = mga\sin\theta$. Il reste à déterminer s'il faut **mettre un signe + ou signe –.** Si $\sin\theta > 0$, le poids a tendance à faire tourner dans le sens des aiguilles d'une montre. En appliquant la règle de la main droite, le pouce est dirigé suivant $\left(-\vec{u}_z\right)$. Il faut donc mettre un signe –, soit $\Gamma_\Delta(\text{poids}) = -mga\sin\theta$.
- Théorème du moment cinétique par rapport à l'axe Δ :

$J_\Delta \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \Gamma_\Delta = -mga\sin\theta$, d'où l'équation différentielle : $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{mga}{J_\Delta}\sin\theta = 0}$.

Si $\theta \ll 1$, on a l'équation d'un oscillateur harmonique : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mga}{J_\Delta}}$.

VI.3 Étude énergétique

- Le moment de l'action de liaison est nul. L'action de contact est donc conservative.
- Le poids dérive d'une énergie potentielle : $E_p = -mgx_G$. Attention au signe – car l'axe Ox est dirigé vers le bas. On a donc $E_p = -mgx_G = -mga\cos\theta$
- Le système est conservatif : l'énergie mécanique se conserve, soit $E_m = E_c + E_p = \dfrac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta = cte$. On obtient l'équation différentielle du mouvement en dérivant l'énergie mécanique par rapport au temps.
  $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 = J_\Delta\dot{\theta}\ddot{\theta} + mga\dot{\theta}\sin\theta$. En simplifiant par $\dot{\theta}$ qui est une solution parasite, on retrouve l'équation différentielle précédente : $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{mga}{J_\Delta}\sin\theta = 0}$.