

1. Introduction

1.1. Objectif

Avec la traction et la flexion simple (étudiées dans un TP séparé), la torsion est la troisième sollicitation de base rencontrée en résistance des matériaux. L'exemple peut-être le plus courant concerne les arbres de transmission qui transmettent la puissance délivrée par un moteur à une partie mobile de la structure.

Les expériences menées dans ce TP ont pour objectif de mesurer les grandeurs caractéristiques associées à la torsion ainsi que de mettre en évidence les limites de la modélisation rappelée en annexe.

1.2. Principe et dispositif expérimental

1.2.1 Matériaux

Trois poutres seront étudiées au cours de la séance :

- poutre A : barre pleine à section cylindrique pleine de diamètre $d_A = 20$ mm et de longueur $L_A = 540$ mm,
- poutre B : tube à section cylindrique de diamètres extérieur $d_{B,e} = 30$ mm et intérieur $d_{B,i} = 26$ mm, de longueur $L_B = 545$ mm,
- poutre C : tube à section rectangulaire de côtés extérieurs 20 mm et 40 mm, d'épaisseur 2 mm, de longueur $L_C = 540$ mm,

Toutes ces poutres sont constituées du même matériau, l'AU4G, un alliage d'aluminium, de module d'Young $E = 72$ GPa et de coefficient de Poisson $\nu = 0.34$.

1.2.2 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental est schématisé sur la figure ci-dessous.

La poutre est encastree (fig. 1a) à une extrémité. A l'autre extrémité, elle est montée avec un support qui ne laisse libre que la rotation autour de l'axe de celle-ci (fig. 1a). La poutre est soumise à un moment de torsion généré par un bras de longueur variable, solidaire de la poutre, sur lequel sont suspendues des masses de valeurs connues (fig. 1a).

Chaque poutre est équipée de jauges de déformation montées selon une rosette à 45° : la jauge centrale est d'axe parallèle à l'axe de la poutre, les deux autres sont de part et d'autre de celle-ci à 45° . Chacune a un facteur de jauge de $k = 2,10$.

Remarque : les deux jauges extérieures forment ce que l'on appelle un « chevron ».

Un boîtier de connexion (fig. 1b) et un pont d'extensiométrie (fig. 1c) permettent de réaliser les mesures de déformation sur une ou deux jauges.



Figure 1 : dispositif expérimental

2. Travail préparatoire

Q1- Calculer le moment quadratique des trois poutres étudiées dans la suite.

Q2- Etablir l'expression permettant de calculer la masse des trois poutres étudiées dans la suite. L'application numérique sera effectuée au cours du TP.

3. Etude expérimentale

3.1 Mesure de glissements

Q6- Pour chacune des trois poutres, faire varier le moment de torsion appliqué (en changeant soit la masse soit le bras de levier) et mesurer le glissement maximum avec les jauges en chevron dans la configuration demi-pont. Ce glissement est donné par lecture directe sur le pont d'extensiométrie.

Q6- Dans cette question, les mesures ne seront effectuées que sur la poutre A.

Mesurer sur une seule jauge du chevron (montage en quart de pont) la déformation unitaire ϵ_1 , puis sur l'autre jauge la déformation unitaire ϵ_2 . Ces mesures seront effectuées pour quelques valeurs de charges. Comparer alors le glissement ainsi obtenu avec celui mesuré directement sur le montage demi-pont. Commenter.

3.2 Détermination du module de Coulomb G

Q6- Au moyen d'un graphique approprié, et en se servant du rappel théorique en fin d'énoncé (cf l'annexe), déterminer le module de Coulomb G du matériau pour les poutres A et B. Expliciter la démarche adoptée pour extraire G .

Q7- L'analyse menée à la question précédente est-elle pertinente dans le cas de la poutre C ? Justifier la réponse.

3.3 Mesure de l'angle de torsion

Q8- En utilisant les mesures faites pour le moment de torsion maximum, déterminer :

- la rotation unitaire α ,
- l'angle de torsion entre l'encastrement et le bras de chargement.

3.4 Tracé du cercle de Mohr

On considère dans cette partie les mesures faites pour le moment de torsion maximum.

Q15- Tracer le cercle de Mohr des déformations pour les poutres A et B. Justifier la construction et indiquer sur la figure les valeurs des points remarquables. L'utilisation des mesures de déformations sur une rosette à 45° pour tracer un cercle de Mohr est détaillé à la fin du fascicule de TP.

3.5 Comparaison de la rigidité en torsion

3.5.1 Structure cylindrique

Q19- Pour le moment de torsion maximum, déterminer pour les poutres A et B leur :

- rigidité en torsion
- contrainte tangentielle maximale
- masse

Q19- Quelles conclusions peut-on tirer des valeurs déterminées à la question précédente ?

3.5.1 Structure tubulaire

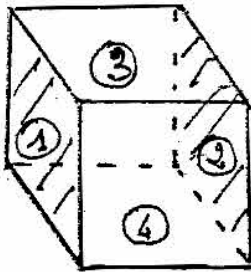
Q19- Reprendre les question Q... et Q... en comparant cette fois les poutres B et C.

Q19- Entre les poutres B et C, quel serait le choix le plus judicieux ? Justifier la réponse.

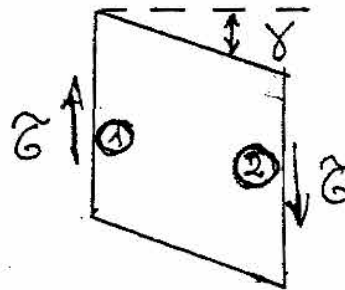
Annexe : rappels théoriques sur la torsion

1) Loi de HOOKE en cisaillement

Comme en traction, on a pu établir une loi de comportement en cisaillement (cf. Schéma)



Vue perspective d'un volume élémentaire (très petit)



Vue de profil du volume chargé sur les facettes (1) et (2) par des contraintes τ de même module (2) a « glissé » par rapport à (1) de l'angle γ

Cette loi se traduira par la formulation suivante

$$\tau = G\gamma$$

Avec γ angle de glissement

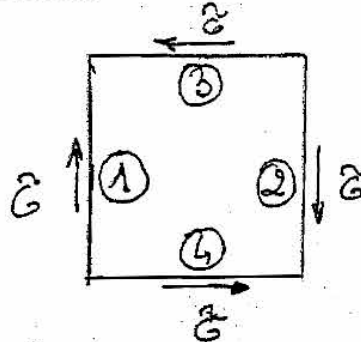
Avec G module de Coulomb d'un matériau élastique utilisé principalement en

Cisaillement qui s'exprime avec les caractéristiques mécaniques classiques par la relation

suivante :
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

2) Principe de parité des contraintes tangentielles

L'équilibre local du volume élémentaire ne peut être assuré que si on associe sur les facettes perpendiculaires (3) et (4) les contraintes τ de même module avec les orientations indiquées sur le schéma.



Vue de profil du volume (non déformé)

3) Hypothèses en Torsion

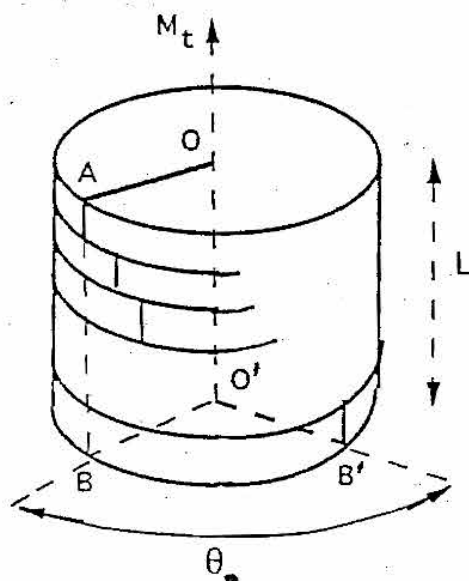
Comme pour toutes les sollicitations des hypothèses (souvent simplificatrices) sont indispensables pour établir des résultats.

- le matériau dont est fait la poutre étudiée est homogène, isotrope et son comportement est élastique linéaire (loi de HOOKE)
- La poutre axisymétrique est soumise à une seule action extérieure un Moment de Torsion, porté par l'axe de la poutre. Ce moment est noté M_t
- Sous cette action une section plane (perpendiculaire à l'axe de la poutre) reste plane et un rayon vecteur reste rayon vecteur.
- Les déplacements et « déformations » sont petites
- Le volume de cette poutre ne change pas dans cette sollicitation.

4) Déformations globale et locale

La poutre étudiée ici est pleine et cylindrique (de rayon R)

L'analyse géométrique de la poutre après application de la charge permet de considérer qu'elle est constituée de disques superposés qui vont tourner les uns par rapport aux autres



Poutre soumise à M_t

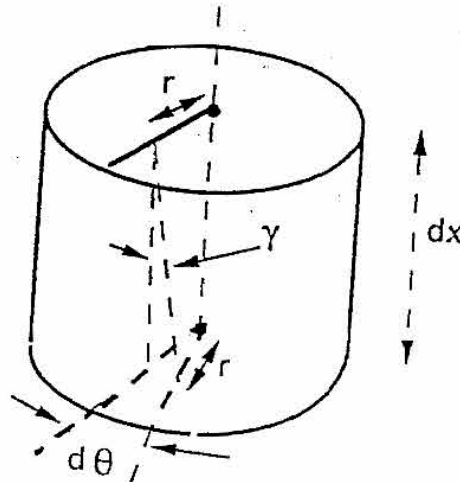
- Globalement entre face d'entrée et de sortie de la poutre on constate une rotation

θ_0 pour une longueur L de poutre, soit une rotation unitaire $\alpha = \frac{\theta_0}{L}$

* Par une analyse d'un disque d'épaisseur petite dx (qu'on fera tendre vers 0) on fait apparaître les éléments suivants (Cf. Schéma.) :

La rotation $d\theta$ entre face d'entrée et de sortie correspond à un « glissement » γ sur la surface extérieure de cette poutre.

Ce glissement est bien sur proportionnel à la distance à l'axe du cylindre où l'on se place.

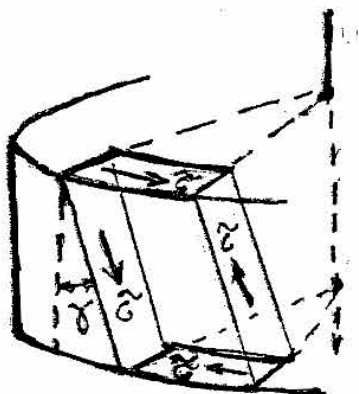


5) Etats de Contraintes et Déformations

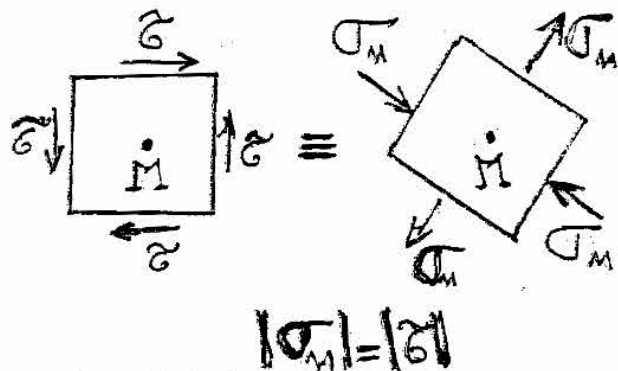
Ces considérations imposent au petit volume représenté sur le schéma joint

- des contraintes de « Cission » τ dont l'effet est un cisaillement . Ces contraintes respectent la parité.
- des déformations angulaires de glissement γ

Remarque : L'état de contraintes proposé peut aussi être réalisé avec des contraintes de « Traction et de Compression » sur un petit volume autour du même point M volume dont les facettes (chargées) sont à 45° de celles chargées en Cissions. Cf. figure ci-dessous.



Etats de Contraintes - Déformations



Equivalence de chargement

6) Relations entre grandeurs globales et locales

On va relier Moment de Torsion et Rotation Unitaire avec les Contraintes et Déformations
Les relations seront exprimées en un point situé sur la surface externe de la poutre à distance R de l'axe, seule zone accessible à la mesure.

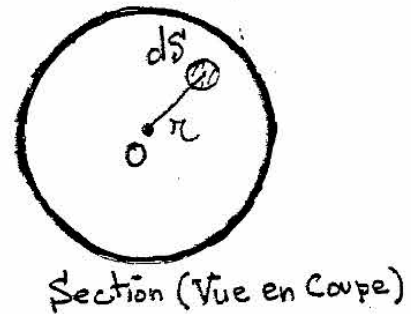
C'est en écrivant l'équilibre et utilisant la loi de HOOKE que l'on obtient :

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} R$$

$$\gamma_{\max} = \frac{M_t}{GI_p} R$$

$$\alpha = \frac{\theta_0}{L} = \frac{M_t}{GI_p}$$

$$C = \frac{M_t}{\alpha}$$



où I_p est le Moment quadratique de section avec $I_p = \iint_{\text{Section}} r^2 dS$

[par exemple $I_p = \pi R^4 / 2$ pour un poutre cylindrique pleine]

où M_t est le Moment de Torsion

où C est la « Rigidité de Torsion »

où « max » indique que l'on se trouve sur la surface extérieure de la poutre et donc en des points de valeur extremum.

7) Mesures des Déformations par jauges – Cercle de MOHR

Pour plus de détails se référer au chapitre « Extensométrie par jauges »

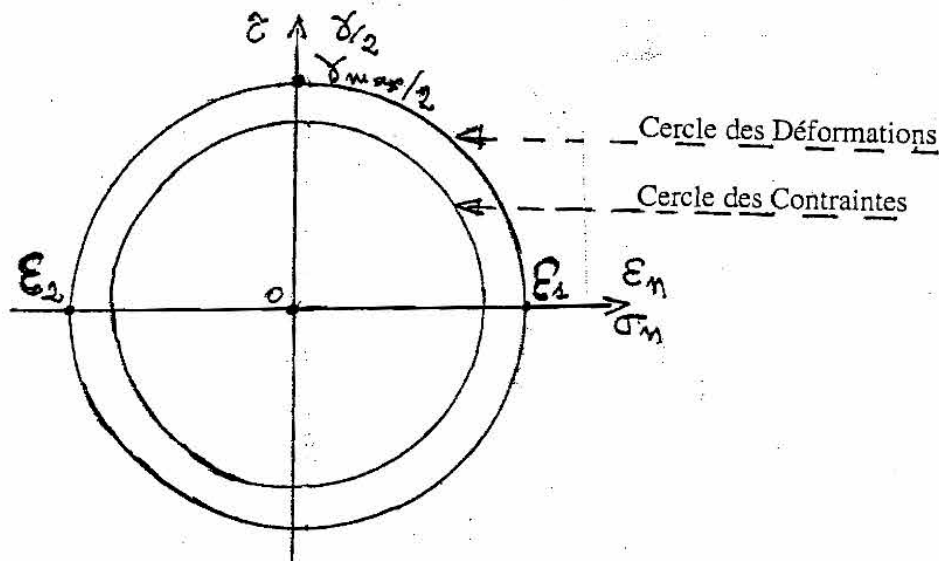
On rappelle ici quelques points importants, en « un point » d'étude sur la structure :

- Pour une facette la Déformation totale est constituée de 2 types de déformations
 - un « allongement unitaire » sur la direction de la normale à cette facette
 - une « déformation angulaire » sur une direction perpendiculaire à la normale
Celle-ci vaut la moitié de l'angle de glissement évoqué plus haut.

- Pour l'ensemble des facettes obtenues par rotation autour d'un axe l'ensemble des déformations peut se représenter dans le plan, dit de MOHR. Ce plan est repéré, en abscisse par les allongements unitaires et en ordonnées par les déformations angulaires

Le lieu des points représentatifs de toutes les facettes est un cercle (de MOHR). Chaque point est associé à une facette ses coordonnées traduisent son allongement unitaire et sa déformation angulaire.

- En Elasticité linéaire les cercles de MOHR des Contraintes et celui des Déformations sont cocentriques (Cf. schéma).



CERCLE DE MOHR en TORSION PURE

Les principales relations entre :

- * les « Déformations principales » ϵ_1 et ϵ_2 mesurés sur deux facettes orthogonales.

Rappel, pour une facette principale seul l'allongement unitaire est non nul, alors que la déformation angulaire elle est strictement nulle

- * le glissement maximum $\gamma_{\max}$ relatif à une facette à 45° par rapport à une des facettes principales

- * et les caractéristiques de la poutre étudiée

sont : $\gamma_{\max} = \epsilon_1 - \epsilon_2$

$$\epsilon_1 = -\epsilon_2 = \frac{M_t}{2GI_p} R$$