

TP Techniques expérimentales et mesures n°3 : impédances complexes

Objectifs pédagogiques

transfert de puissance	système électronique (propriété)
impédance d'entrée/de sortie équivalente	système électronique (propriété)
réponse fréquentielle	système linéaire (propriété)
déphasage	appareils de mesure (manipulation)
caractérisation d'un quadripôle	système linéaire (modélisation)
mettre en place un protocole	Rapporter une mesure (protocole)

Matériel utilisé

oscilloscope	résistances :	$10\Omega \times 2$, $49,9\Omega \times 2$, $10k\Omega \times 2$	plaque à trous
GBF	capacités :	$10nF \times 5$,	
multimètre		$22nF \times 2$,	
		$33nF \times 2$,	
		$47nF \times 2$,	
		$100nF \times 2$,	
		$150nF \times 2$	

Résumé du TP

Ce TP a pour but d'introduire des protocoles expérimentaux pour la mesure d'impédances complexes. Deux applications seront présentées : l'identification des paramètres d'un quadripôle et l'adaptation d'impédance.

1 Introduction au TP

1.1 Modélisation d'un système sous forme de quadripôle

Un quadripôle est une partie d'un circuit isolée entre deux bornes d'entrée et deux bornes de sortie, voir Figure 1.

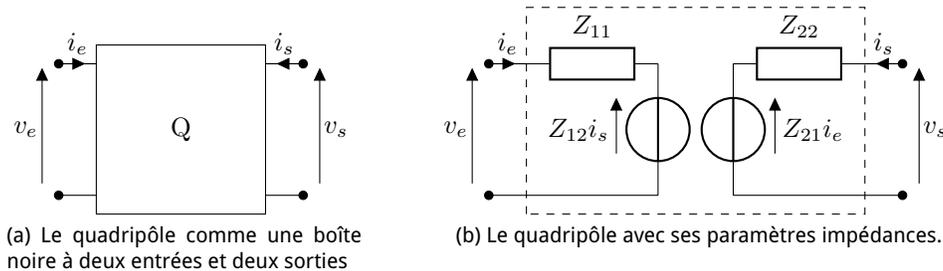


FIGURE 1: Représentation schématique d'un quadripôle.

La modélisation d'un circuit par un quadripôle est très utilisée en électronique et facilite l'étude de systèmes complexes. Si le circuit ne contient que des dipôles linéaires, les quatre grandeurs fondamentales v_e , v_s , i_e et i_s sont liées par des équations linéaires. On représente ces relations sous forme de matrice :

Matrice d'impédances : v_e , v_s en fonction de i_e et i_s

Matrice d'admittances : i_e , i_s en fonction de v_e et v_s

Matrice de transfert : v_s , i_s en fonction de v_e et i_e

Matrice Hybride : v_e , i_s en fonction de i_e et v_s .

On choisit la représentation matricielle la plus adaptée au problème étudié, par exemple, la matrice d'impédances pour la caractérisation, la matrice de transfert pour l'enchaînement de quadripôles. Les différentes formes sont toutes liées, ainsi l'identification des paramètres dans l'une d'entre elles amène à l'identification des paramètres dans toutes les autres formes.

On peut décomposer un système électronique complexe en une mise en cascade de quadripôles représentant chacun un étage. La mise en équation pour l'étude du système (réponse fréquentielle par exemple) est alors facilitée par le calcul matriciel, bien adapté aux méthodes numériques.

Ces notions seront reprises en détail en cours d'électronique.

La matrice d'impédances à la loupe

La deuxième partie du TP consiste à mesurer les paramètres de la matrice d'impédances d'un filtre. On donne la définition de la matrice d'impédances Z :

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \quad \text{tel que} \quad \begin{pmatrix} v_e \\ v_s \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} i_e \\ i_s \end{pmatrix}$$

et on en déduit les relations suivantes

$$\begin{cases} v_e = Z_{11}i_e + Z_{12}i_s \\ v_s = Z_{21}i_e + Z_{22}i_s \end{cases} \quad (1)$$

que l'on peut traduire par le schéma équivalent de la Fig. 1b.

Un quadripôle chargé par une résistance R_c se comporte différemment d'un quadripôle à vide. Quelle serait la relation entre i_s et v_s si une charge résistive était utilisée en sortie? À l'aide des équations de 1 et cette relation, exprimer $\frac{v_s}{v_e}$, la fonction de transfert, uniquement à l'aide des impédances. Que devient cette expression pour $R_c \rightarrow +\infty$?

1.2 Adaptation d'impédance

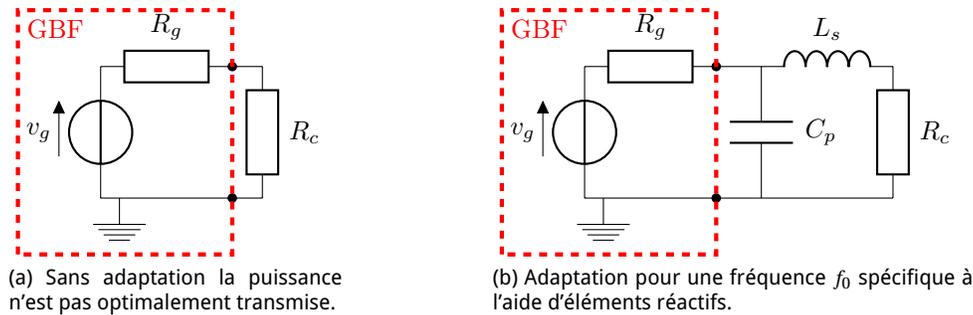


FIGURE 2: Schéma de principe pour l'adaptation d'impédance.

Lorsqu'un générateur possède une impédance interne non nulle et que l'on souhaite optimiser le transfert de puissance du générateur vers une charge, il est nécessaire d'effectuer une adaptation d'impédance. Supposons par exemple un générateur de résistance interne R_g délivrant une tension efficace $v_{g,eff}$ (Figure 2a). La puissance qu'il pourra débiter dans une charge résistive R_c sera maximale lorsqu'on aura $R_c = R_g$.

Aide : vous pourrez suivre les étapes suivantes :

Exprimer la puissance P_{R_c} , dissipée dans R_c , dans le montage de la figure 2a en fonction de $v_{g,eff}$, R_g et R_c .

Montrer que P_{R_c} passe par un extremum pour une valeur particulière de R_c .

Exprimer l'expression de P_{R_c} dans ce cas particulier.

Si par exemple R_c est plus faible que R_g , il faudra augmenter l'impédance que voit le générateur pour optimiser le transfert de puissance. A fréquence fixe cela est possible en ajoutant un circuit constitué de

1. une inductance en série (pour augmenter l'impédance de charge); puis
2. un condensateur en parallèle sur l'ensemble (pour annuler la partie réactive de l'impédance).

1.3 Conversion série–parallèle

Il peut s'avérer utile de basculer entre une représentation d'impédances R (résistance) et X (réactance) en série vers une représentation en parallèle ou vice versa. Notons l'impédance de série $Z = R_s + jX_s$, alors une admittance équivalente parallèle est donnée par $Y = \frac{1}{R_p} - j\frac{1}{X_p} = (R_s + jX_s)^{-1} = \frac{R_s - jX_s}{R_s^2 + X_s^2}$ ce qui donne par identification :

$$\begin{cases} R_p = R_s(1 + Q^2) \\ X_p = X_s \frac{1 + Q^2}{Q^2} \end{cases} \quad \text{où } Q = \frac{X_s}{R_s} = \frac{R_p}{X_p}$$

2 Travail en salle

2.1 Étude d'un filtre

La première partie du TP consiste à vérifier par la mesure le comportement en fréquence d'un filtre coupe bande (Figure 4) puis, en considérant ce filtre comme étant un quadripôle, de déterminer ses paramètres d'impédance.

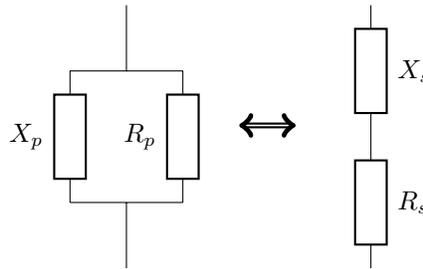


FIGURE 3: Transformation parallèle-série pour des impédances $Z = R + jX$ constituées d'une résistance R et d'une réactance X . X vaut $-\frac{1}{\omega C}$ pour une capacité et ωL pour une inductance.

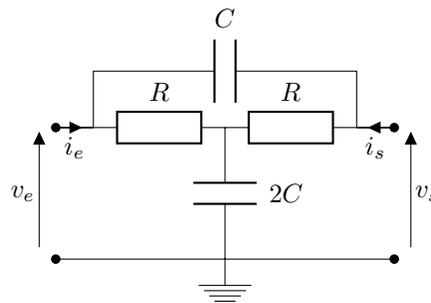


FIGURE 4: Filtre en T ponté étudié dans ce TP. Les valeurs des composants sont $R = 10\text{k}\Omega$ et $C = 10\text{nF}$.

Le filtre étudié ne comporte que des composants passifs et linéaires, le quadripôle correspondant sera donc passif et linéaire. On montre que dans ce cas : $Z_{12} = Z_{21}$. De plus le quadripôle est symétrique car le filtre présente la même configuration vu de l'entrée et vu de la sortie, on peut en déduire que : $Z_{11} = Z_{22}$.

On aura donc seulement deux paramètres indépendants à mesurer pour caractériser la matrice impédance de ce quadripôle. Des équations (1), on peut déduire :

$$\begin{cases} Z_{11} = \frac{v_e}{i_e} \Big|_{i_s=0} \\ Z_{21} = \frac{v_s}{i_e} \Big|_{i_s=0} \end{cases}$$

On pourra mesurer les paramètres impédances à vide ($i_s = 0$), i.e., aucune charge n'est connectée entre les 2 bornes de sortie (voir Fig. 5), aucun courant de charge n'est appelé en sortie. Les expressions théoriques des paramètres sont données en annexe.

2.1.1 Diagramme de Bode

On commencera par vérifier la réponse en fréquence du filtre une fois câblé (seconde fiche de mesure). L'objectif étant de vérifier l'allure de la réponse en fréquence du gain et de la phase (voir résultats de simulation en annexe), ainsi que la fréquence centrale f_0 du filtre utile pour la suite du TP.

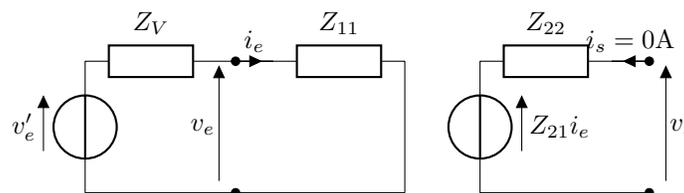


FIGURE 5: Schéma de principe pour les mesures de Z_{11} et de Z_{21} .

- Déterminer expérimentalement la fréquence centrale f_0 , fréquence pour laquelle le déphasage entre v_s et v_e s'annule.
- Mesurer la réponse de gain en fréquence et le déphasage de v_s par rapport v_e pour une dizaine de fréquences On prendra par exemple : $f \in \left\{ \dots, \frac{f_0}{3}, \frac{f_0}{2}, f_0, 2f_0, 3f_0, \dots \right\}$. Vous justifierez pourquoi des fréquences linéairement réparties ne conviennent pas (ex 100-200-300-400 Hz).

2.1.2 Mesure de Z_{11}

Quand on fait la mesure à vide ($i_s = 0$), le schéma équivalent de la figure 5 montre que du point de vue de l'entrée, le quadripôle est équivalent à l'impédance Z_{11} .

Une mesure de Z_{11} consiste à placer en série avec l'entrée une impédance variable complexe connue Z_V (comme par exemple l'association d'une résistance avec un élément réactif. On choisira ici un condensateur que l'on placera en série ou en parallèle avec la résistance.

Le réglage de Z_V conduisant à un déphasage nul entre v'_e et v_e correspond à une impédance Z_v proportionnelle à Z_{11} cherchée. On peut alors calculer Z_{11} à l'aide de la connaissance du rapport des tensions et de Z_V .

Faire les mesures à f_0 avec Z_v une association en parallèle, puis en série où la partie réactive est une capacité de 33 nF et la partie résistive sera déterminée à l'aide d'une résistance variable (boîte de résistances à décades).

On notera $Z_{11} = R_1 + jX_1$.

2.1.3 Mesure de Z_{21}

Une seconde façon de procéder que nous utiliserons pour la mesure de Z_{21} consiste à déterminer le rapport v_s/i_e (voir figure 5). Cependant en électronique il est plus commode de mesurer des tensions que des courants. Pour éviter la mesure de courant nous allons ajouter une résistance connue en R_v (éventuellement réglable) en série avec le générateur de fonction. Les mesures de v'_e et v_e nous permettront de déterminer i_e puis à l'aide de v_s d'en déduire Z_{21} . Pour Z_{21} on notera : $Z_{21} = \left. \frac{v_s}{i_e} \right|_{i_s=0} = R_2 + jX_2$.

Protocole de mesure : On applique un signal sinusoïdal v'_e à la fréquence f_0 pour laquelle le gain de l'amplificateur est réel. On retient le réglage R_V de l'association en parallèle ci-dessus. On visualise v_e et v'_e à l'oscilloscope, pour en déduire la valeur du courant i_e (amplitude et phase par rapport à v_s). Les mesures de v_s , i_e et du déphasage permettent de calculer les parties réelles et imaginaires de Z_{21} .

2.2 Adaptation d'impédance

Dans cette seconde partie nous allons chercher à optimiser l'échange de puissance entre un générateur de fonction dont l'impédance interne est approximativement 50Ω et une charge résistive de 10Ω . Reprenons le schéma de la figure 2b et supposons que nous travaillons à une fréquence fixe f_0 . L'impédance composée de R_c en série avec L_s vaut $R_c + jL_s\omega_0$ avec $\omega_0 = 2\pi f_0$.

L'ajout d'une capacité C_p en parallèle avec L_s et R_c (voir figure 2b) permettra, si l'on choisit correctement la valeur de C_p , de rendre ce dipôle équivalent purement résistif de valeur R_p à la fréquence f_0 (cf. première fiche de mesure).



Application numérique pour le schéma de la figure 2a : $R_c = 10\Omega$ et $R_g = 50\Omega$. On souhaite optimiser l'échange de puissance entre le générateur et la charge R_c . A quelle fréquence pourrions-nous le faire si on dispose d'une inductance de $150\mu\text{H}$? Calculer alors la capacité C_p à ajouter pour réaliser cette adaptation. Pourquoi ne pas choisir de simplement mettre 40Ω en série avec R_c ?

Montrer par un protocole adapté que les valeurs trouver dans votre préparation correspondent réellement à l'adaptation d'impédance recherchée.

2.3 Pour aller plus loin

En choisissant une charge résistive R_c à la sortie du filtre en T ponté, montrer que la fonction de transfert obtenue en préparation prédit vos mesures. Utiliser Z_{11} et Z_{21} obtenues lors de vos mesures sous section 2.1 et/ou les valeurs calculées.

Annexes

A Fonction de transfert du filtre coupe-bande

Le calcul de la fonction de transfert du filtre (pas de charge d'où $i_s = 0$; figure 5) donne :

$$\frac{V_s}{V_e}(p) = \frac{1 + 2pRC + 2(pRC)^2}{1 + 4pRC + 2(pRC)^2} \quad (p = j\omega) \quad \frac{1 + 2j\omega RC + 2(j\omega RC)^2}{1 + 4j\omega RC + 2(j\omega RC)^2}$$

On montre que ce filtre est un coupe bande, son gain est minimum à $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}RC}$. La fonction de transfert peut se récrire – avec $p = j\omega$ – comme

$$\frac{V_s}{V_e}(j\omega) = \frac{1 + \sqrt{2}\frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2\sqrt{2}\frac{j\omega}{\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

et si on travaille à $\omega = \omega_0$ (ce qui sera le cas dans le TP), on montre facilement que le gain y est minimal et vaut $1/2 \equiv -6\text{dB}$. De plus à cette pulsation particulière v_s et v_e sont en phase puisque le gain est réel.



FIGURE 6: Diagramme des gains (en trait plein; échelle de gauche) et diagramme des phases (en pointillés; échelle de droite).

B Calcul de Z_{11}

Z_{11} est l'impédance d'entrée équivalente du filtre lorsque celui-ci n'est pas chargé ($i_s = 0$). Il s'agit donc de calculer l'impédance d'entrée du circuit de la figure 7.

Le calcul – un peu long – donne :

$$Z_{11}(\omega) = R \frac{1 + 2(\omega RC)^2}{1 + 4(\omega RC)^2} - j \frac{1}{2\omega C} \frac{1 + 6(\omega RC)^2}{1 + (\omega RC)^2}$$

Si on se place à $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}RC}$, on a $Z_{11}(\omega)|_{\omega=\omega_0} = \frac{2}{3}R - j \frac{2\sqrt{2}}{3}R = \frac{2}{3}R - j \frac{1}{\frac{3}{2}\omega_0 C}$. Vue de l'entrée ce circuit peut donc être assimilé à une résistance de valeur $\frac{2}{3}R$ en série avec un condensateur de valeur $\frac{3}{2}C$.

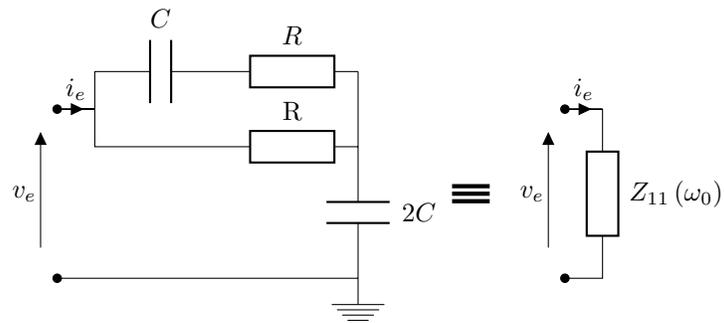


FIGURE 7: Impédance d'entrée équivalente.

On peut aussi considérer l'admittance plutôt que l'impédance d'entrée :

$$Y_{11}(\omega)|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{\frac{2}{3}R - j\frac{2\sqrt{2}}{3}R} = \frac{1}{\frac{2}{3}R} \frac{1}{1 - j\sqrt{2}} = \frac{1}{2R} + j\frac{1}{\sqrt{2}R} = \frac{1}{2R} + j\omega_0 C$$

Vue de l'entrée, ce circuit peut donc aussi être vu comme une résistance de valeur $2R$ en *parallèle* avec un condensateur de valeur C .