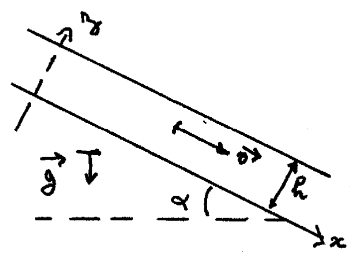
Écoulement d'un fluide visqueux sur un plan incliné.

Un fluide incompressible de masse volumique μ, de viscosité η s'écoule avec une profondeur constante h dans un canal de largeur constante L, faisant avec l'horizontale un angle α (cf figure).



Question 1 :
Déterminer,en régime permanent, le champ de vitesses, de la forme $\overrightarrow{v} = v(x,z)\,\overrightarrow{e}_x$ ***et le champ de pression*** $p(x,z)$***. Au préalable, on montrera que*** v ***ne dépend pas de*** x ***et l'on justifiera que :***

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}(x,h) = 0\ \forall x$$

grâce à un raisonnement sur les forces de viscosité en surface.

Le fluide est incompressible donc div $\overrightarrow{v} = 0$ soit ici $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, donc v ne dépend que de z, on notera $v(z)$.

L'équation de Navier-Stokes est, en régime permanent :

$$\mu\,(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\overrightarrow{v} = \mu\,\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,p + \eta\,\Delta\overrightarrow{v}$$

soit en projection sur Ox et Oz avec ici $\Delta\overrightarrow{v} = \Delta(v\,\overrightarrow{e_x}) = (\Delta v)\,\overrightarrow{e_x} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\,\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{grad} = v\,\frac{\partial}{\partial x}$ et donc $(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ (ce qui est évident sans calcul, la vitesse ne dépend pas de x, les particules ont un mouvement rectiligne uniforme sans accélération) :

$$0 = \mu\,g\,\sin\alpha - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \qquad \text{sur } Ox$$
$$0 = -\mu\,g\,\cos\alpha - \frac{\partial p}{\partial z} \qquad \text{sur } Oz$$

L'intégration de la seconde relation donne (la constante d'intégration est constante vis-à-vis de z, ce peut être a priori une fonction de x notée $f(x)$) :

$$p(x,z) = f(x) - \mu\,g\,z\,\cos\alpha$$

Or en $z = h$ et pour tout x, la pression est la pression atmosphérique, que nous noterons p_0, donc

$$p(x,z) = p_0 + \mu\,g\,(h-z)\,\cos\alpha$$

On remarquera que la fonction $f(x)$ s'avère constante et l'on en déduit $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ que l'on reporte dans la première projection de l'équation de Navier-Stokes :

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} = -\frac{\mu\,g\,\sin\alpha}{\eta}$$

Une première intégration donne :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = Cte - \frac{\mu\, g\, z\, \sin\alpha}{\eta}$$

Ici se situe le raisonnement le plus subtil de cet exercice : au niveau d'une surface élémentaire $\mathrm{d}S$ parallèle au plan Oxy, la force exercée par le fluide au dessus sur le fluide au-dessous a pour module $\eta\, \mathrm{d}S\, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$, en particulier en $z = h$, il s'agit de l'interaction entre le liquide visqueux et l'air qui, lui, a une viscosité négligeable ; cette force donc $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}$ doit s'y annuler, ce qui permet le calcul de la constante d'intégration :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{\mu\, g\, (h - z)\, \sin\alpha}{\eta}$$

Une seconde intégration, en tenant compte du fait que la vitesse du fluide visqueux doit s'annuler sur le support solide, en $z = 0$ donne

$$v(z) = \frac{\mu\, g\, \left(h\, z - \frac{z^2}{2}\right)\, \sin\alpha}{\eta}$$

Question 2 :
Quel est le débit volumique ? Définir et calculer une vitesse moyenne.

A travers une surface de largeur L et de hauteur h à l'abscisse x, on calcule le débit par intégration (la vitesse n'est pas uniforme) du débit élémentaire sur une largeur L entre les cotes z et $z + \mathrm{d}z$:

$$D_v = \int_0^h v(z)\, L\, \mathrm{d}z = \frac{\mu\, g\, L\, \sin\alpha}{\eta} \int_0^h \left(h\, z - \frac{z^2}{2}\right)\, \mathrm{d}z = \frac{\mu\, g\, L\, h^3\, \sin\alpha}{3\, \eta}$$

Une vitesse moyenne v_m serait une vitesse uniforme donnant le même débit donc telle que $D_v = L\, h\, v_m$ donc

$$v_m = \frac{\mu\, g\, h^2\, \sin\alpha}{3\, \eta}$$

Question 3 :
L'écoulement présente localement une petite bosse ; prévoir qualitativement l'évolution de la forme de cette bosse.

Au vu de la formule précédente, la bosse va plus vite que le reste. Dans le référentiel lié à la bosse, le liquide en dehors de celle-ci va vers l'arrière. Il rentre donc du liquide par l'avant de la bosse et il en sort par l'arrière ; la bosse grossit à l'avant et mincit à l'arrière, autrement dit la hauteur de la bosse augmente devant et diminue derrière : la bosse se cabre.

Question 4 :
Une application numérique donne comme ordre de grandeur du nombre de* Reynolds *pour cet écoulement 1000 pour l'eau et 1 pour l'huile. Commenter.

Pour l'huile le nombre de Reynolds est compatible avec l'écoulement laminaire décrit dans l'énoncé. Pour l'eau, il dénote un écoulement turbulent : sur un tel plan incliné, l'écoulement de l'eau se fera avec des tourbillons et son étude sera autrement délicate.