## Rebonds et géométrie vectorielle

Dans ce texte, nous allons essayer de montrer comment est modifié la vitesse $\vec{v}$ d'une boule (disque) qui rencontre une paroi, un coin ou une autre boule.

Nous verrons aussi comment trouver la vitesse $\vec{v}'$ après l'impact dans le cas où la paroi bouge et dans le cas où le choc à lieu entre deux boules en mouvement.

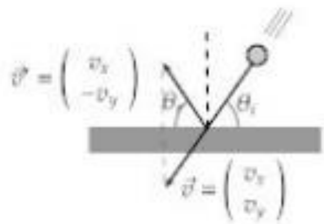
On donnera aussi des indications sur la manière de tester si la boule a touché une paroi et on esquissera deux méthodes permettant d'éviter que la boule morde la paroi.

### Rebond simple

Considérons pour commencer un rebond sur une paroi horizontale (parallèle à l'axe horizontal de l'écran). Admettons que l'angle entre la trajectoire de la boule et la paroi soit $\theta_i$. On peut montrer que si le choc est élastique, la boule rebondit (à peu près) avec un angle $\theta_r$ égal à $\theta_i$.

Soit $v_x$ et $v_y$ les composantes de la vitesse de la boule avant le choc. Si $x$ désigne l'axe horizontal et $y$ la coordonnée verticale (dirigée vers le bas !) sur l'écran, les composantes après le choc sont alors données par :

$$v'_x = v_x \quad \text{et} \quad v'_y = -v_y$$



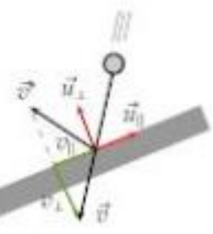

Quelle serait la relation entre les composantes de $\vec{v}'$ avec une paroi verticale ?

### Rebond sur une paroi non horizontale

Nous allons utiliser le fait que le rebond est à nouveau symétrique par rapport à une perpendiculaire à la paroi. Mais pour pouvoir utiliser les relations simples entre les composantes de $\vec{v}'$ et celles de $\vec{v}$ (voir paragraphe précédent), il nous faut tout d'abord exprimer $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ par rapport à une base $(\vec{u}_\parallel, \vec{u}_\perp)$, où $\vec{u}_\parallel$ est un vecteur unitaire (de norme 1) parallèle à la paroi et $\vec{u}_\perp$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à la paroi.

Dans cette base, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ peuvent s'écrire respectivement :

$$\begin{pmatrix} v_\parallel \\ v_\perp \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} v'_\parallel \\ v'_\perp \end{pmatrix} \quad \text{avec : } \quad v'_\parallel = v_\parallel \quad \text{et} \quad v'_\perp = -v_\perp$$



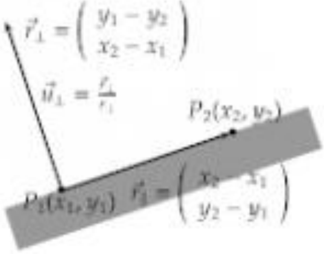

Il nous faut donc trouver $v_\parallel$ et $v_\perp$, en déduire $v'_\parallel$ et $v'_\perp$, puis calculer les composantes de $\vec{v}'$ dans la base de départ.

Commençons par la fin :

$$\vec{v}\,' = v'_{\parallel}\vec{u}_{\parallel} + v'_{\perp}\vec{u}_{\perp}$$

Comment trouver les vecteurs unitaires $\vec{u}_{\parallel}$ et $\vec{u}_{\perp}$ ? Pour trouver $\vec{u}_{\parallel}$, il suffit de connaître les coordonnées de deux points $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ appartenant à la paroi. On obtient un vecteur unitaire parallèle à la paroi si on divise le vecteur $\vec{r}_{\parallel}$ joignant les deux points par sa norme $r_{\parallel} = \|\vec{r}_{\parallel}\|$ :

$$\vec{u}_{\parallel} = \begin{pmatrix} u_{\parallel x} \\ u_{\parallel y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r_{\parallel}}\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \quad \text{où :} \quad r_{\parallel} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$




Il suffit maintenant de trouver un vecteur perpendiculaire à $\vec{r}_{\parallel}$ et de le diviser par sa norme pour trouver $\vec{u}_{\perp}$. Un tel vecteur est donné par :

$$\vec{u}_{\perp} = \begin{pmatrix} u_{\perp x} \\ u_{\perp y} \end{pmatrix} = \frac{1}{r_{\perp}}\begin{pmatrix} -r_{\parallel y} \\ r_{\parallel x} \end{pmatrix} = \frac{1}{r_{\perp}}\begin{pmatrix} -(y_2 - y_1) \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec :} \qquad r_{\perp} = r_{\parallel} = \ldots$$

Attaquons-nous maintenant aux composantes $v_{\parallel}$ et $v_{\perp}$. En fait, il s'agit simplement des projections de $\vec{v}$ sur $\vec{u}_{\parallel}$ et $\vec{u}_{\perp}$. Ces projections s'obtiennent à l'aide d'un produit scalaire. Pour mémoire :

$$\text{Si} \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} \qquad \text{alors :} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

Voici donc comment calculer les composantes :

$$v_{\parallel} = \vec{v}\cdot\vec{u}_{\parallel} \qquad \text{et} \qquad v_{\perp} = \vec{v}\cdot\vec{u}_{\perp}$$

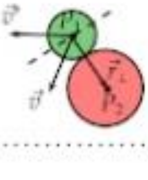
Concrètement, voici l'ordre pour faire les calculs :

1. $\vec{r}_{\parallel}$, puis $\vec{r}_{\perp}$
2. $\vec{u}_{\parallel}$ et $\vec{u}_{\perp}$
3. $v_{\parallel}$ et $v_{\perp}$
4. $v'_{\parallel}$ et $v'_{\perp}$
5. $\vec{v}\,'$

**Rebond sur une boule fixée**

Lors d'un rebond sur une boule fixée (ou sur un coin), on trouve facilement le vecteur $\vec{r}_{\perp}$ :

$$\vec{r}_{\perp} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \qquad \text{et donc :} \qquad \vec{r}_{\parallel} = \begin{pmatrix} y_2 - y_1 \\ -(x_2 - x_1) \end{pmatrix}$$



Le reste de la procédure reste ensuite le même...

**Paroi en mouvement**

Lorsque la paroi bouge, il suffit de connaître le vecteur vitesse $\vec{v}_P$ de la paroi (perpendiculairement à la paroi), pour pouvoir facilement se ramener à la procédure décrite précédemment. Il faut juste se placer auparavant dans un référentiel lié à la paroi. Concrètement, il faut soustraire $\vec{v}_p$ à $\vec{v}$ pour trouver la vitesse de la boule dans le nouveau référentiel (en mouvement) :

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{v}_P$$

On fait ensuite tous les calculs avec $\vec{w}$ au lieu de $\vec{v}$...
A la fin, on trouve alors la vitesse après le rebond, mais dans le référentiel en mouvement, donc en fait $\vec{w}\,'$. Pour retrouver la vitesse réelle, il faut maintenant ajouter $\vec{v}_P$ :

$$\vec{v}\,' = \vec{w}\,' + \vec{v}_P$$

**Deux boules en mouvement**

Ce qui change dans cette situation, c'est que les deux boules (de masse $m_1$, respectivement $m_2$ vont rebondir toutes les deux (dans le cas général). On s'en sort en utilisant le principe de la conservation de la quantité de mouvement. Comme dans le paragraphe précédent, on se place tout d'abord dans le référentiel de la seconde boule : la vitesse de la première boule vaut alors : $\vec{w}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.
On procède ensuite comme dans le cas d'un choc avec une boule ($m_2$) fixée, mais avec les relations suivantes entre les composantes avant et après le choc (on utilise la lettre $w$ pour parler les vitesses dans le référentiel lié à la deuxième boule) :

$$\begin{aligned}
w'_{1\parallel} &= w_{1\parallel} \\
w'_{1\perp} &= w_{1\perp} \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \qquad (= 0 \quad \text{si } m_1 = m_2) \\
w'_{2\parallel} &= 0 \\
w'_{2\perp} &= w_{1\perp} \cdot \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \qquad (= w_{1\perp} \quad \text{si } m_1 = m_2)
\end{aligned}$$

Une fois obtenu les vecteurs vitesse dans le référentiel lié à $m_2$ ($\vec{w}'_1$ et $\vec{w}'_2$), on additionne $\vec{v}_2$ aux deux vitesses pour trouver les vitesse réelles après la collision :

$$\vec{v}'_1 = \vec{w}'_1 + \vec{v}_2 \qquad \text{et :} \qquad \vec{v}'_2 = \vec{w}'_2 + \vec{v}_2$$

**Comment savoir si la boule touche la paroi ?**

Ce problème est relativement facile à résoudre dans le cas de parois horizontales ou verticales. De même, pour une boule fixée, ce n'est pas trop compliqué : il suffit de vérifier si la distance (trouvée avec Pythagore) est inférieure à la somme des rayons des deux boules.
Pour les parois inclinées, il s'agit de calculer la distance entre la boule et la droite confondue avec la paroi. La distance $d$ entre un point $(x_0, y_0)$ du plan et une droite d'équation $ax + by + c$ est donnée par (au signe près) :

$$d = \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$