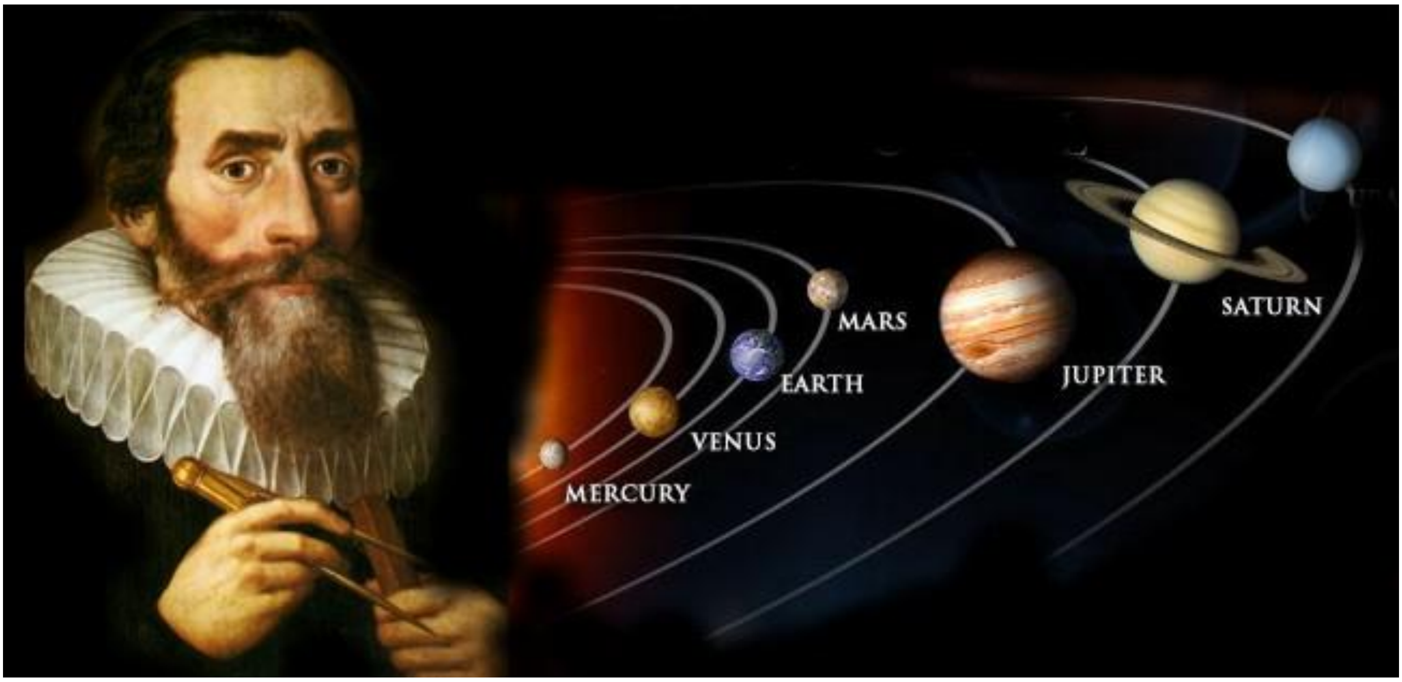
TP$_{19}$ Les lois de Kepler

Objectif :

- Connaitre les lois de Kepler et exploiter la troisième.



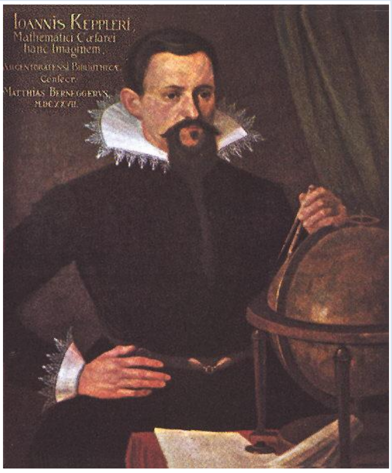
DOCUMENTS MIS A DISPOSITION :

DOC. 1 : Les lois de Kepler

Claude Ptolémée (II^{è} siècle après J.-C.) fut le premier à décrire avec précision le mouvement du Soleil, de la Lune et des planètes autour de la Terre, considérée alors comme le centre du monde, par une combinaison de mouvements circulaires uniformes […].

Trois siècles plus tard, Nicolas Copernic (1473-1543), astronome polonais, propose son modèle héliocentrique du système solaire, comprenant des combinaisons de trajectoires circulaires mais encore plus compliquées que celles de Ptolémée.

Les mesures très précises de Mars faites par l'astronome danois Tycho Brahe (1546-1601), convainquent son élève **Johannes Kepler** (1571-1630), astronome allemand (ci-contre), que l'orbite de la planète rouge ne peut pas être décrite ni par un cercle, ni par une combinaison de cercles, mais qu'elle est elliptique, le Soleil occupant l'un des foyers. Il publie ce résultat en 1609, dans son *Astronomia nova*, aujourd'hui connu sous le nom de **première loi de Kepler**.



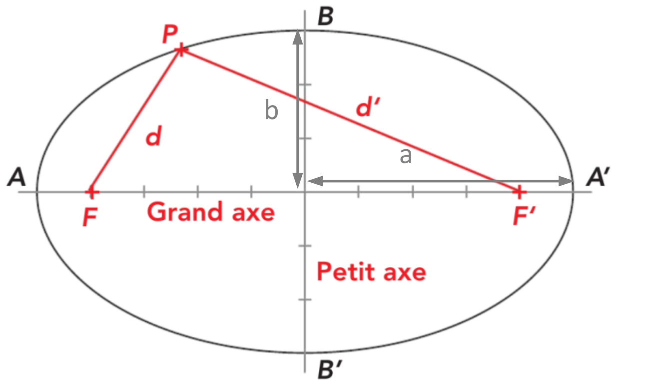
Johannes Kepler en 1609

Puis, il généralise cette loi à d'autres planètes dans ses *Epitome astronomiae copernicanae* (entre 1618-1621) où apparait la première description correcte du système solaire et dans lesquelles est correctement formulée la **deuxième loi de Kepler** : Pendant des durées égales, le rayon Soleil-Planète balaye des aires égales.

En 1619, dans *Harmonice mundi*, il établit la **troisième loi de Kepler** : le carré de la période ***T*** de révolution des planètes est proportionnel au cube de leur distance ***r*** au Soleil.

Pendant ce temps, en 1610, le savant Galilée (1564-1642) découvre que quatre petits satellites (appelées lunes galiléennes) gravitent autour de Jupiter (voir *doc.1*). Cette observation des premiers corps tournant autour d'un autre corps que la Terre est pour lui une preuve irréfutable de la validité de la théorie héliocentrique, et donc de la véracité des **trois lois de Kepler**.

DOC. 2 : Les ellipses



Une ellipse est une courbe plane, définie comme l'ensemble des points P dont la somme des distances à deux points fixes F et F', appelés foyers de l'ellipse, est constante :

$$FP + F'P = d + d' = 2a = \text{constante}$$

[AA'] est son grand axe et mesure 2a
[BB'] est son petit axe et mesure 2b

→ Ces deux axes sont des axes de symétrie de l'ellipse.

DOC. 3 : Orbite de Mercure

On étudie la trajectoire de Mercure dans le référentiel héliocentrique. Le soleil S est placé au centre d'un repère (S, x, y), plan contenant la trajectoire de Mercure M. La position de Mercure est définie par la donnée d'un couple (r, θ) où r = SM et θ est l'angle entre l'axe (Sx) et (SM).

t (en j)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
θ (en °)	0	31	60	85	106	124	140	155	169	183
r (en ua)	0,3075	0,315	0,336	0,363	0,392	0,418	0,440	0,455	0,464	0,467

t (en j)	50	55	60	65	70	75	80	85	90
θ (en °)	197	211	227	244	263	286	312	342	0
r (en ua)	0,462	0,450	0,432	0,408	0,381	0,352	0,326	0,310	0,307

Données : 1 ua = $1,5 \times 10^{11}$ m G = $6,67 \times 10^{-11}$ m^3.kg^{-1}.s^{-2} $M_S = 2 \times 10^{30}$ kg

1. Les lois de Kepler (→ compte rendu)

1.1. Loi des orbites

En s'aidant des documents, élaborer et mettre en œuvre une démarche permettant de vérifier la première loi de Kepler.

1.2. Loi des aires

❶ En aidant du document 3, faire un schéma de la situation décrite dans le document faisant apparaitre le repère, une position de Mercure, r et θ.

❷ Exprimer les coordonnées x et y de Mercure en fonction de r et θ.

❸ Dans Latis Pro, représenter les positions de Mercure dans un repère orthonormé.

❹ Vérifier la seconde loi de Kepler et en déduire l'évolution de la vitesse de Mercure sur sa trajectoire.

1.3. Loi des périodes

Planète	T (an)	a (ua)
Mercure	0,240	0,387
Vénus	0,615	0,723
Terre	1,00	1,00
Mars	1,88	1,52
Jupiter	11,9	5,20
Saturne	29,4	9,51
Uranus	84,0	19,2
Neptune	165	30,0

À partir des données dans le tableau ci-contre, élaborer et mettre en œuvre une démarche pour vérifier la troisième loi de KEPLER, loi des périodes.

→ Vérifier que la valeur de la constante de proportionnalité évoquée dans cette loi est proche de la valeur du rapport : $\dfrac{4\pi^2}{G \times M_S}$.

2. Les lunes galiléennes

Les lunes galiléennes, Io, Europe, Ganymède et Callisto sont quatre satellites naturels de Jupiter parmi les 63 connus. Ils se nomment ainsi car ils ont été découverts par Galilée (1564-1642) en 1610. Leurs trajectoires peuvent être considérées comme circulaires.

Nom des lunes galiléennes	Rayon *r* de l'orbite quasi-circulaire (en km)	Période de révolution T (en j)
Io	$4{,}22 \times 10^5$	1,77
Europe	$6{,}71 \times 10^5$	3,55
Ganymède	$1{,}07 \times 10^6$	7,16
Callisto	$1{,}88 \times 10^6$	16,7

Questions

Q1. Quel est l'astre attracteur des lunes galiléennes ?

Q2. En déduire le référentiel le plus adapté pour l'étude de leur mouvement.

Q3. Montrer que la vitesse d'une lune galiléenne est $v = \sqrt{\dfrac{G \times M_J}{r}}$.

Q4. Quelle est l'expression de leur vitesse **v** en fonction de **T** et de ***r*** ? Calculer alors la vitesse de chaque lune.

Q5. Réécrire la troisième loi de Kepler appliquée aux lunes galiléennes.

Q6. En déduire la masse M_J de Jupiter. Calculer l'écart relatif avec la valeur connue ($1{,}90 \times 10^{27}$ kg). Conclure.

3. Conclusion (→ compte rendu)

Qu'apportent les lois de Kepler sur la connaissance des trajectoires des planètes et des satellites, de leur vitesse et de leur période de révolution ?

Vous rédigerez un compte-rendu décrivant les démarches réalisées pour la partie 1, les résultats obtenus et la conclusion.

COUPS DE POUCE

Première loi de KEPLER

❶ Repérer le point P, position de Mercure la plus proche du Soleil (c'est le point à $t = 0$).
❷ Placer le point A qui correspond à la position la plus éloignée du Soleil.
❸ Mesurer $PA = 2a$.
❹ Placer le point O, le milieu de PA et S', symétrique de S par rapport à O.
❺ Choisir un point M de la trajectoire et évaluer SM + S'M.
❻ Renouveler la mesure pour une ou deux autres positions.
❼ Conclure.

Deuxième loi de KEPLER

❶ Repérer les positions M_i de Mercure aux instants $t_0 = 0$, $t_2 = 10$ j, $t_6 = 30$ j, $t_8 = 40$ j, $t_{11} = 55$ j et $t_{13} = 65$ j. Tracer les segments SM_0, SM_2, SM_6, SM_8, SM_{11}, SM_{13}.

❷ Proposer un protocole permettant de comparer les aires balayées par le segment SM en 10 jours.

❸ Conclure.

Troisième loi de KEPLER

❶ Dans Latis Pro, représenter graphiquement T^2 en fonction de a^3. T est la période de révolution de la planète exprimée en s et a est le demi-grand axe de la trajectoire exprimé en m.

❷ Conclure.

❸ En déduire la valeur du coefficient directeur de la droite modélisée.

❹ Comparer cette valeur à celle du rapport $\dfrac{4\pi^2}{G \times M_S}$.

CORRECTION

1. Les lois de Kepler

2. Les lunes galiléennes

Réponses aux questions :

Q1. L'astre attracteur est Jupiter.

Q2. Le référentiel le mieux adapté est un référentiel lié à Jupiter.

Q3. On montre que dans le cas d'une orbite quasi-circulaire, le vecteur accélération est centripète, c'est-à-dire dirigé vers le centre de la trajectoire (le cercle) et à pour valeur :

$$a = \frac{v^2}{r}$$

Chaque lune étant soumise à la seule attraction de Jupiter, elles subissent une force résultante de valeur :

$$F_{J/l} = G\frac{m_\ell \times M_J}{r^2}$$

On en déduit donc (deuxième loi de Newton) :

$$m_\ell \frac{v^2}{r} = G\frac{m_\ell \times M_J}{r^2} \Leftrightarrow \frac{v^2}{r} = G\frac{M_J}{r^2} \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{G \times M_J}{r}}}$$

Q4. La vitesse de révolution de chaque lune est donnée par :

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Q5. La période de révolution de chaque lune est donnée par :

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi r}{v} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G \times M_J}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G \times M_J}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \times M_J}}$$

Q6. À partir du résultat de la question précédente, on en déduit :

$$\boxed{M_J = \frac{4\pi^2 r^3}{G \times T^2}}$$

3. Conclusion

D'après les lois de Kepler :

- les trajectoires des planètes et des satellites sont des ellipses dont l'astre attracteur est placé à l'un des foyers ;
- la vitesse des planètes et des satellites n'est pas constante, elle augmente lorsque la planète ou le satellite se rapproche du Soleil et diminue lorsqu'il s'en éloigne ;
- le carré de la période de révolution des planètes et des satellites est proportionnel au cube de leur distance moyenne à l'astre attracteur.

Sources de l'activité

Activités n°2 p158 (HACHETTE TS Enseignement Spécifique Collection Dulaurans – Durupthy)
Activités n°3 p168 (BORDAS TS Enseignement Spécifique Collection E.S.P.A.C.E Lycée)