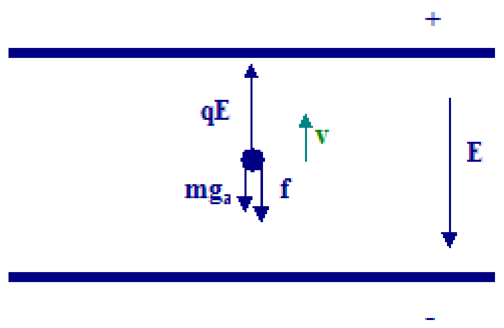
Expérience de Millikan

par Gilbert Gastebois

1. Schéma des forces



Les vecteurs sont notés en gras

ρ : Masse volumique de l'huile = 900 kg/m^3
ρ_0 : Masse volumique de l'air = 1,23 kg/m^3
η : Viscosité de l'air (à 20°C) = 1,8.10^{-5} Pa.s
r : Rayon de la goutte
d : Distance entre les plaques
U : Tension entre les plaques
E : Champ électrique = U/d

Masse de l'objet : m = ρV = 4/3 π ρ r^3
Poussée d'Archimède : F_A = ρ_0Vg
m g - F_A = (ρ - ρ_0)Vg = ρVg (1 - ρ/ρ_0) = m g_a
(en posant $g_a = g (1 - \rho/ \rho_0))$
Frottement fluide laminaire : f = 6 π η r v
(formule de Stokes)
Force électrique : q E

2. Mouvement de la goutte sous l'action d'une force constante F et d'un frottement fluide laminaire

2.1 Équation différentielle du mouvement

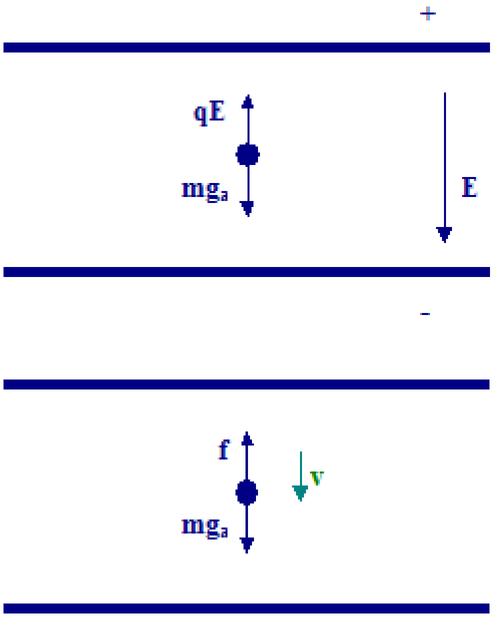
m **a** = m $\mathbf{g_a}$ + **f** + **F**
On projette sur un axe vertical Oy
m a = - mg_a - f + F = - mg_a + F - 6 π η r v
a = dv/dt donc m dv/dt = mg_a + F - 6 π η r v
m/(6 π η r) dv/dt + v = (mg_a + F)/(6 π η r)

2.2 Solution pour la vitesse.

Solution générale : v = (mg_a + F)/(6 π η r) + A exp(- t/τ) τ = m/(6 π η r)
Conditions initiales : A t = 0, v = 0 donc A = - (mg_a + F)/(6 π η r)
v = (mg_a + F)/(6 π η r) (1 - exp(- t/τ)) **τ = m/(6 π η r) = 2/9 $\rho r^2/\eta$**
et v_{max} = (mg_a + F)/(6 π η r)

Les gouttes ont un rayon voisin de 1µm donc τ voisin de 10 µs. Elles atteignent leur vitesse limite en environ 100 µs. On peut donc considérer que la vitesse limite est atteinte instantanément et ainsi la somme des forces est toujours nulle.

3. Méthode de Millikan



A l'équilibre : $q\,E = mg_a = 4/3\ \pi\ \rho\ g_a\ r^3$

Pendant la chute : $mg_a = 6\ \pi\ \eta\ r\ v$ donc

$4/3\ \pi\ \rho\ g_a\ r^3 = 6\ \pi\ \eta\ r\ v$

$r^2 = 9\ \eta\ v\ /(2\ \rho\ g_a)$

$q\,E = 4/3\ \pi\ \rho\ g_a\ (9\ \eta\ v\ /(2\ \rho\ g_a))^{3/2} =$

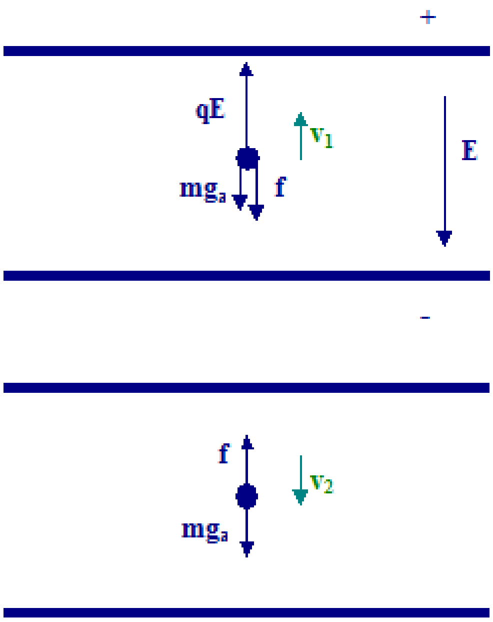
$9(2)^{1/2}\ \pi\ \rho\ g_a\ (\eta\ v\ /(\rho\ g_a))^{3/2} = 9\pi\ (2\eta^3 v^3\ /(\rho\ g_a))^{1/2}$

$$\mathbf{q = 9\pi/E\ \ (2\ \eta^3\ v^3\ /(\ \rho\ g_a))^{1/2}}$$

Un grand nombre de mesures montre que q est toujours voisin d'un multiple de :

$$\mathbf{e = 1.602.10^{-19}\ C}$$

4. Méthode 2



Pendant la montée : $q\,E - m\,g_a = 6\ \pi\ \eta\ r\ v_1$

Pendant la chute : $m\,g_a = 6\ \pi\ \eta\ r\ v_2$ donc

$4/3\ \pi\ \rho\ g_a\ r^3 = 6\ \pi\ \eta\ r\ v_2$

$r^2 = 9\ \eta\ v_2\ /(2\ \rho\ g_a)$

$q\,E = 4/3\ \pi\ \rho\ g_a\ r^3\ + 6\ \pi\ \eta\ r\ v_1$

$q\,E = 4/3\ \pi\ \rho\ g_a\ (9\ \eta\ v_2\ /(2\ \rho\ g_a))^{3/2}\ +$

$6\ \pi\ \eta\ (9\ \eta\ v_2\ /(2\ \rho\ g_a))^{1/2}\ v_1$

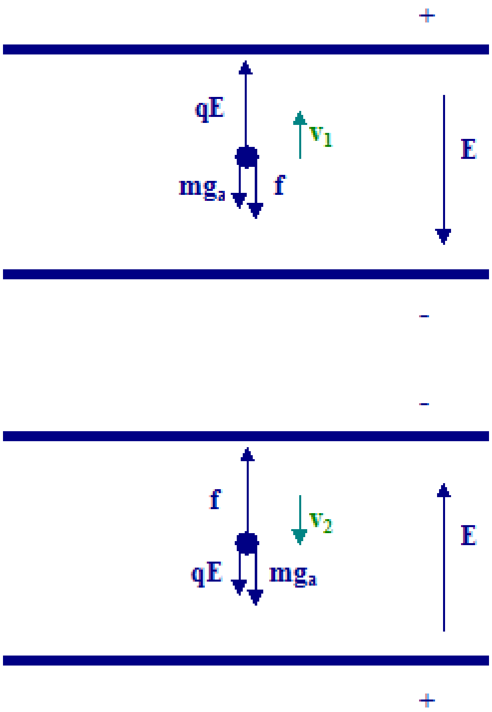
$q\,E = 9\ \pi\ (2\ \eta^3 v_2/(\rho\ g_a))^{1/2}\ \ (\ v_1 + v_2\ )$

$$\mathbf{q = 9\pi/E\ \ (2\ \eta^3\ v_2/(\rho\ g_a))^{1/2}\ \ (\ v_1 + v_2\ )}$$

Un grand nombre de mesures montre que q est toujours voisin d'un multiple de :

$$\mathbf{e = 1.602.10^{-19}\ C}$$

5. Méthode 3



Pendant la montée : $q E - mg_a = 6 \pi \eta r v_1$

Pendant la chute : $q E + mg_a = 6 \pi \eta r v_2$

$2 q E = 6 \pi \eta r (v_1 + v_2)$

$2 m g_a = 6 \pi \eta r (v_2 - v_1)$ donc

$8/3 \pi \rho g_a r^3 = 6 \pi \eta r (v_2 - v_1)$

$r^2 = 9 \eta (v_2 - v_1)/(4 \rho g_a)$

$2 q E = 6 \pi \eta (9 \eta (v_2 - v_1)/(4 \rho g_a))^{1/2} (v_1 + v_2)$

$2 q E = 9 \pi (\eta^3 (v_2 - v_1)/(\rho g_a))^{1/2} (v_1 + v_2)$

$$\mathbf{q = 9\pi/(2E) \quad (\eta^3 (v_2 - v_1)/(\rho g_a))^{1/2} \quad (v_1 + v_2)}$$

Un grand nombre de mesures montre que q est toujours voisin d'un multiple de :

$e = 1.602.10^{-19}$ C